MATEMÁTICAS II

Paquete Didáctico

Autores

Brenda Berenice Báez García
Oscar Iván Castellanos Lara
Wilbert de Jesús López
Juana Castillo Padilla
Manuel Odilón Gómez Castillo

Coordinación y revisión
Juana Castillo Padilla

MATEMÁTICAS II

MATEMÁTICAS II

UNIDAD 1

ECUACIONES CUADRÁTICAS

ACTIVIDAD 1

ECUACIONES CUADRÁTICAS

ACCIÓN 1

MODELACIÓN DE SITUACIONES REALES CON ECUACIONES CUADRÁTICAS EN UNA INCÓGNITA

ACCIÓN 2

SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA POR UN MÉTODO DE FACTORIZACIÓN

ACCIÓN 3

ANTECEDENTES ALGEBRAICOS PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA EN UNA INCÓGNITA POR MEDIO DE UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

ACCIÓN 4

SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA POR EL MÉTODO DE FACTORIZACIÓN COMPLETANDO UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

ACCIÓN 5

LA FÓRMULA GENERAL PARA LA ECUACIÓN CUADRÁTICA CON UNA INCÓGNITA

ACCIÓN 1

MODELACIÓN DE SITUACIONES REALES CON ECUACIONES CUADRÁTICAS EN UNA INCÓGNITA

Objetivo: el alumno debe aprender a construir el modelo correspondiente a una ecuación cuadrática con una incógnita en situaciones reales.

> **AL ESTUDIANTE:** en esta acción únicamente vas a construir el modelo matemático, con ello vas a introducirte a la noción de ecuaciones cuadráticas en una incógnita. Recuerda que la modelación demanda identificar la(s) variable(s) o incógnita(s) y las relaciones que tiene con el resto de los datos en el enunciado del problema.

Ejemplo 1. Las tres casas que se muestran aquí están en la acera de la calle que corresponde a la numeración de los impares y la suma del cuadrado de sus números es 83, ¿Qué número le corresponde a cada una de estas casas?

Solución a). En este problema hay tres incógnitas que son el número que tiene cada una de las tres casas. Si una incógnita es **x** = "número de la primera casa", entonces la segunda incógnita es **x** + 2 = "número de la segunda casa" y la tercera incógnita es **x** + 4 = "número de la tercera casa". La condición de que la suma del cuadrado de estos tres números es igual a 83 se traduce al lenguaje algebraico en la siguiente ecuación:

$$x^2 + (x + 2)^2 + (x + 4)^2 = 83$$

Desarrollando los cuadrados en los paréntesis de agrupamiento se tiene

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 + x^2 + 8x + 16 = 83$$

Sumando los términos semejantes y pasando el número 83 al lado izquierdo de la ecuación nos queda la ecuación de abajo a la izquierda y con la resta de 20 – 83 = -63 se tiene la ecuación de la derecha.

$$3x^2 + 12x + 20 - 83 = 0 \qquad\qquad 3x^2 + 12x - 63 = 0$$

Finalmente dividimos entre tres ambos lados de la igualdad y se obtiene la ecuación:

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

Las cinco *ecuaciones* que desarrollamos aquí son *equivalentes* y las dos últimas están expresadas en la forma llamada ***estándar***, salvo que la última está en la forma más *simplificada*. Las cinco son ***modelos matemáticos*** del problema y cada modelo es una ***ecuación cuadrática con una incógnita***.

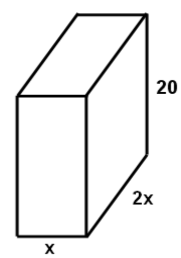
Solución b). Si una incógnita es **x** = "número de la segunda casa" construye la ecuación cuadrática en la incógnita **x** y exprésala en su forma estándar simplificada.

El modelo estándar simplificado es ____________________.

Ejemplo 2. Ahora las tres casas que se muestran en la fotografía del ejemplo 1 están en la acera de la calle correspondiente a la numeración de los pares y la suma del cuadrado de sus números es 200, ¿Qué número le corresponde a cada una de estas casas?

Solución. Si una de las incógnitas es **x** = "número de la tercera casa" construye la ecuación cuadrática con la incógnita **x** que modela dicha situación y llévala a su forma estándar más simple, razona cada paso que hagas sin ver lo realizado en el ejemplo 1.

El modelo estándar simplificado es ____________________.



Ejemplo 3. Una fábrica de aceite de olivo va a lanzar al mercado un nuevo producto fabricado con una cosecha muy especial y lo va a hacer en una presentación de lujo. El diseñador del envase quiere que sea un bote de lámina con capacidad de un litro (1000 cm^3), con 20 cm de alto y la base debe ser rectangular con el largo igual al doble del ancho. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la base del bote?

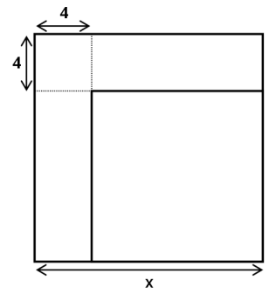
Solución. El problema tiene dos incógnitas que son el largo y el ancho de la base rectangular del bote, pero con las relaciones que establece el problema se pueden expresar en términos de una sola incógnita: sea **x** = "el ancho de la base del bote", entonces el largo es 2**x** como se muestra en la figura. Para construir la ecuación tenemos dos condiciones acerca del volumen: que debe ser de 1000cm^3 (la establece el enunciado del problema) y la otra la obtenemos con la fórmula del volumen aplicado a la figura del cilindro rectangular. Así con la igualdad de estas dos condiciones la ecuación es.

$$40\mathbf{x}^2 = 1000$$

Dividiendo entre cuarenta esta ecuación nos queda $\mathbf{x}^2 = 25$ y pasando 25 al lado izquierdo obtenemos la forma estándar de la ecuación.

$$\mathbf{x^2} - 25 = 0$$

AL ESTUDIANTE: la forma de modelar un problema no es única: el ejemplo 1 se modeló con dos ecuaciones (modelos matemáticos) diferentes. También un modelo matemático puede servir para modelar diferentes situaciones reales: en la solución b) del ejemplo 1 el modelo matemático es el mismo que el modelo matemático del ejemplo 3.



Ejemplo 4. En el salón de clase, una maestra pone en práctica una actividad que diseñó para que los niños desarrollen sus habilidades de razonamiento y de cálculo aritmético. Les dice que dibujen un cuadrado de tamaño medio, acto seguido los pone a recortar el cuadrado y después a que corten 4 cm a dos lados para formar otro cuadrado como el que se muestra en la figura. Luego pide que midan el área del cuadrado que obtuvieron, a lo cual Pepito responde que el suyo tiene un área de 16 cm^2; finalmente la maestra les pide que contesten las siguientes preguntas: ¿cuánto medía el área del cuadrado que dibujaron originalmente?, y, ¿cuánto mide el área que recortaron al cuadrado original? Además, con lo recortado se forma un cuadrado y dos rectángulos, ¿cuánto mide el área de cada una de estas figuras?

El objetivo de este ejemplo consiste en *construir una ecuación cuadrática en una incógnita y reducirla a su forma estándar* para el caso de las medidas del cuadrado que originalmente dibujó Pepito.

Solución. La incógnita es $\mathbf{x}$ = “longitud del lado del cuadrado que dibujó Pepito”, entonces el área de 16 cm^2 que él midió es el área del cuadrado ya recortado, por tanto, la ecuación de dicho cuadrado es: $(\mathbf{x} - 4)^2 = 16$; desarrollando la potencia del lado izquierdo de esta ecuación se tiene $\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} + 16 = 16$ y restando 16 a cada lado de la ecuación (siendo -16 el *inverso aditivo*, propiedad de los números reales) se tiene

$$\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} = 0$$

Esta ecuación es el modelo matemático estándar simplificado, *con la solución de dicha ecuación se responden las preguntas que formuló la maestra en el caso del cuadrado que dibujó Pepito*.

Ejemplo 5. La cuerda elástica de un *bungee* mide 45 m. Si una persona se lanza, ¿cuánto tiempo está en caída libre (o sea hasta que la cuerda esté completamente estirada y empiece a frenarse la caída)?

Solución. Primero tenemos que establecer la ecuación del movimiento de un cuerpo en caída libre, que es $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{g}}{2}\mathbf{t}^2$, en donde **d** es la distancia que recorre un cuerpo en caída libre y **t** es el tiempo transcurrido desde que comenzó la caída, siendo **g** la constante de gravedad cuyo valor es 9.8 m/seg^2. Con este valor la ecuación de movimiento es $\mathbf{d} = \frac{\mathbf{g}}{2}\mathbf{t}^2 = \frac{9.8}{2}\mathbf{t}^2 = 4.9\mathbf{t}^2$; al aproximar 4.9, la ecuación de la caída libre es

$$\mathbf{d} = 5\mathbf{t}^2$$

La persona que se lanza en este *bungee* recorre una distancia de 45m en caída libre, por lo que la ecuación cuadrática que modela esta caída libre es $5\mathbf{t}^2 = 45$; simplificando esta ecuación y transformándola a la forma estándar el modelo matemático de este problema es

$$\mathbf{t}^2 - 9 = 0$$

Ejemplo 6. En una ciudad se contrató a una empresa para construir la base circular de una fuente en un jardín público. El presupuesto presentado para este efecto fue de $400 por metro cuadrado y el costo final de dicha base fue de $31,416. ¿Cuánto mide el diámetro de dicha base?

Solución. La cantidad total de metros construidos la calculamos dividiendo el precio total entre 400, cuyo resultado nos da el área de la base circular; así, podemos ya establecer la ecuación cuadrática en términos de la incógnita **d** = "diámetro de la base", por medio del área de un círculo, quedando $\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{31{,}416}{400}$. Para simplificar la ecuación primero elevamos al cuadrado la expresión $\left(\frac{d}{2}\right)^2$ y dividimos $\frac{31{,}416}{400}$; $\pi\left(\frac{d^2}{4}\right) = 78.54$. Para expresar la ecuación en su forma estándar aplicamos una propiedad de los números reales denominado el *inverso multiplicativo*, significa en este caso, en multiplicar ambos lados de la igualdad por 4. Después de simplificar la ecuación y ponerla en la forma estándar queda la ecuación cuadrática en la incógnita **d**

$$\pi\mathbf{d}^2 - 314.16 = 0$$

La definición general de una ecuación cuadrática en una incógnita es la siguiente:

Una* ECUACIÓN CUADRÁTICA CON UNA INCÓGNITA *es una ecuación algebraica que se reduce a la forma estándar:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

***En donde* a, b *y* c *son números reales con* a ≠ 0.**

En la solución a) del ejemplo 1 la ecuación $\mathbf{x}^2 + (\mathbf{x} + 2)^2 + (\mathbf{x} + 4)^2 = 83$ es cuadrática en una incógnita porque se simplificó en la forma estándar $\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x} - 21 = 0$ con a =1, b = 4 y c = -21.

La solución b) del mismo ejemplo se inició con la ecuación $(\mathbf{x} - 2)^2 + \mathbf{x}^2 + (\mathbf{x} + 2)^2 = 83$ y es cuadrática en una incógnita debido a que se reduce a la forma estándar $\mathbf{x}^2 - 25 = 0$, aquí se tiene que a = 1, b = 0 y c = -25.

Para el ejemplo 2, $(\mathbf{x} - 4)^2 + (\mathbf{x} - 2)^2 + \mathbf{x}^2 = 200$ es la ecuación cuadrática en una incógnita que originalmente construiste y $\mathbf{x}^2 - 12\mathbf{x} - 180 = 0$ es la forma estándar simplificada con a =1, b = -12 y c = -180.

En el ejemplo 3, la ecuación cuadrática en una incógnita original es $40\mathbf{x}^2 = 1000$ y en su forma estándar más simple es $\mathbf{x}^2 - 25 = 0$, aquí a = 1, b = 0 y c = -25 (aunque también $40\mathbf{x}^2 - 1000 = 0$ está en la forma estándar, no está en la forma simplificada o reducida).

En el ejemplo 4 la ecuación original es $(\mathbf{x} - 4)^2 = 16$ y transformada en la forma estándar es $\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} = 0$ con a = 1 b = -8 y c = 0.

Para el ejemplo 5 la ecuación cuadrática estándar $\mathbf{t}^2 - 9 = 0$ la incógnita es **t**, con a = 1, b = 0 y c =-9.

También en el ejemplo 6 la ecuación $\pi\mathbf{d}^2 - 314.16 = 0$ es de la misma forma en la incógnita **d**, con a = π, b =0 y c =-314.16.

Los ejemplos que acabamos de ver nos sirven para clasificar las ecuaciones de segundo grado con una incógnita en *completas* e *incompletas*, como se muestra en el siguiente cuadro sinóptico.

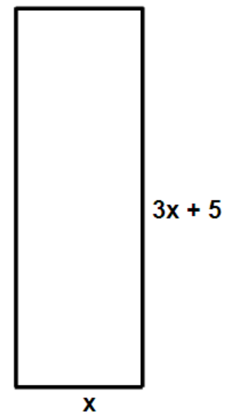
Ecuación cuadrática

- **Completa: $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$**
- **Incompleta**
  - **$ax^2 + bx = 0$ con $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c = 0$**
  - **$ax^2 + c = 0$ con $a \neq 0$, $b = 0$ y $c \neq 0$**

Todos los ejemplos que a continuación vas a trabajar se modelan con una ecuación cuadrática en una incógnita, en cada caso hay que expresarla en su forma estándar simplificada.

Pregunta:
¿Por qué “a” debe de ser diferente de cero en la forma estándar de la ecuación cuadrática?

Ejemplo 7. En una zona ejidal cada parcela es de media hectárea en forma rectangular, en donde el largo es el triple del ancho más 5 metros. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno?



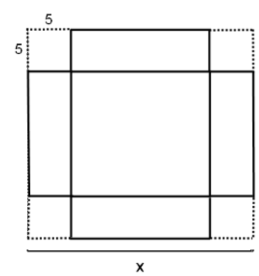
Solución. La incógnita es **x** = "____________________". La ecuación cuadrática que modela el problema es ____________________. En el siguiente espacio haz las operaciones para que la lleves a su forma estándar simplificada.

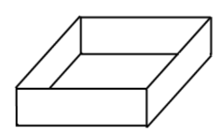
El modelo estándar simplificado es ____________________.

Ejemplo 8. En relación a las casas del ejemplo 1, tenemos ahora consecutivamente dos de ellas en la acera de los números pares con el producto de sus números igual a 168. ¿Qué número tiene cada casa?

Solución. Para la incógnita **x** = "número de la primera casa" la ecuación que se traduce directamente del enunciado del problema es ____________________. Expresa esta ecuación en su forma estándar.

Ejemplo 9. Para la época navideña un fabricante ha diseñado un alhajero que debe cumplir con las siguientes características: es una caja de bronce con base cuadrada sin tapa (porque va a ser transparente), 5 cm de alto y volumen de 75 cm^3. Para elaborar uno de muestra, cortó en una lámina de bronce un cuadrado y en él recortó en cada esquina un cuadrado de 5 cm por lado y dobló los lados para formar la caja (ver las figuras). ¿Cuántos centímetros tienen los lados del cuadrado que cortó originalmente en la lámina de bronce?

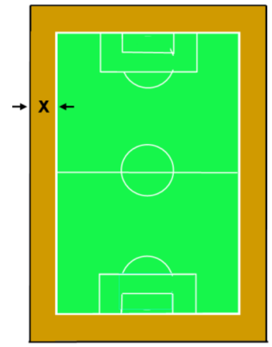




Solución. La incógnita es **x** "________________________________".
Construye la ecuación cuadrática que modela este problema.

El modelo estándar es ______________________.

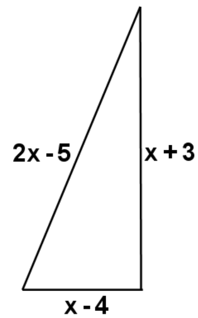
Ejemplo 10. En un estadio de futbol las gradas están construidas alrededor de una superficie rectangular de 11000 m^2, en donde la cancha es a su vez un rectángulo de 105 por 68 metros y una franja de ancho uniforme como área de protección, como se muestra en la figura. ¿Cuánto mide el ancho de la franja de protección?



Solución. Si la incógnita es **x** = "ancho de la franja de protección" construye la ecuación cuadrática relacionando el ancho de la franja y las dimensiones de la cancha con el área del rectángulo grande.

El modelo estándar es _______________________.

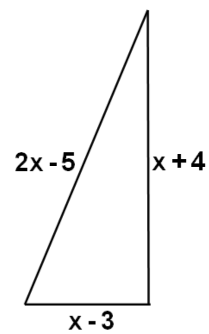
Ejemplo 11. Si los lados de un triángulo rectángulo son como se indican en la figura, ¿cuánto mide cada lado?, ¿cuánto mide el perímetro? y ¿cuánto mide el área?



Solución. Construye la ecuación cuadrática que modela este problema (utiliza el teorema de Pitágoras) y llévala a su forma estándar.

El modelo estándar simplificado es _______________________.

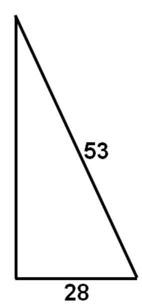
Ejemplo 12. Si en el triángulo rectángulo del ejemplo anterior se han invertido los números 3 y 4 en los catetos, como se indica en la figura, construye la ecuación cuadrática con la cual podemos contestar las preguntas: ¿cuánto mide cada lado?, ¿cuánto mide el perímetro? y ¿cuánto mide el área?



Solución. Construye la ecuación cuadrática que modela este problema.

El modelo estándar simplificado es _______________________.

Ejemplo 13. La cuerda que iza una bandera cuando está en lo más alto de la asta tiene 53 metros la parte que cuelga. Al tensarse, el extremo libre se separa 28 metros de la asta bandera, ¿qué altura tiene la asta de la bandera?



Solución. Determina la incógnita **x** y construye la ecuación cuadrática que modela este problema.

El modelo estándar simplificado es ______________________.

Ejemplo 14. En un triángulo rectángulo que también es isósceles la hipotenusa mide 10 cm. ¿Cuánto mide cada lado del triángulo?

Solución. Determina la incógnita **x** y construye la ecuación cuadrática que modela este problema. Haz un dibujo y representa adecuadamente en él la incógnita.

El modelo estándar simplificado es ______________________.

Ejemplo 15. En la primera acción del primer semestre recordarás que vimos un ejemplo llamado "las sumas de Gauss", que consisten en sumar de uno en uno, empezando con el 1, los números sucesivos hasta cualquier número natural. Allí construimos la fórmula $1+2+3+\ldots+\mathbf{n}=\frac{\mathbf{n}(\mathbf{n}+1)}{2}$ para hacer estas sumas, ¿hasta qué número hay que sumar para que la suma de Gauss nos dé como resultado 49770?

Solución. Construye la ecuación cuadrática que modela este problema.

El modelo estándar simplificado es ______________________.

Ejemplo 16. Con motivo de las fiestas decembrinas se ha colgado una enorme esfera en lo alto de un edificio. En su fabricación ocuparon 900 m^2 (superficie de la esfera) de poliuretano.

Solución. Construye una ecuación cuadrática con la cual se pueda calcular el radio de dicha esfera.

El modelo estándar simplificado es ______________________.

AL ESTUDIANTE: los siguientes problemas tienen un mayor grado de dificultad que los anteriores. Vas a demostrar que eres capaz de entender los significados que se te plantean, aplicando lo que hasta aquí has visto usando tus capacidades de reflexión e imaginación. Debes definir primero las incógnitas y las relaciones entre ellas en forma de ecuaciones, luego debes entender qué es lo que se te está pidiendo y buscar alguna forma de dar con el modelo. Como vas a usar el concepto de *recíproco de un número,* a continuación, se te va a explicar el significado de dicho concepto.

El recíproco de un número* x *es $\frac{1}{\mathbf{x}}$. Así, por ejemplo, el recíproco del número cinco es $\frac{1}{5} = 0.2$, o el recíproco de -10 es $-\frac{1}{10} = -0.1$, también el reciproco de $\frac{3}{2}$ es $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$

Al aplicar producto de extremos entre producto de medios.

Ejemplo 17. Un número entero sumado con su recíproco es igual a 2. ¿Cuál es este número? y, ¿cuál es su recíproco?

Solución. Si la incógnita **x** es el número que pide el problema, construye una ecuación cuadrática con la cual se encuentra dicho número y su recíproco.

El modelo estándar simplificado es ______________________.

Ejemplo 18. La suma de un número y su recíproco es $\frac{13}{6}$. ¿Qué número satisface esta condición? y, ¿cuánto vale su recíproco?

Solución. Si **x** es el número desconocido en el problema, construye una ecuación cuadrática en la incógnita **x** con la cual se encuentra dicho número y su recíproco.

El modelo estándar simplificado es ______________________.

Ejemplo 19. Los colonos de una calle aportaron $20,000 para las mejoras de dicha calle, repartiéndose cada casa su cooperación en partes iguales. Se dieron cuenta de que, si hubieran participado las 20 casas que están deshabitadas, cada casa habría contribuido con $50 menos. ¿Cuántas casas están habitadas en esa calle?, ¿y de cuánto fue la cooperación por cada casa?

Solución. Si la incógnita **x** es **x** = "número de casas habitadas", construye una ecuación cuadrática mediante la cual podamos contestar las dos preguntas planteadas.

El modelo estándar simplificado es _____________________.

Ejemplo 20. Cada fin de año, como una gratificación extra a la que señala la ley, el dueño de una mediana empresa reparte $7,200 en vales de despensa por partes iguales entre sus empleados. Este año la empresa tiene seis trabajadores menos que el año pasado, por lo que cada uno recibió $60 más en vales. ¿Cuántos empleados tiene actualmente la compañía? y, ¿de cuánto fue su gratificación extra de cada uno?

Solución. Con **x** = "número de empleados de la empresa actualmente" construye una ecuación cuadrática mediante la cual podamos contestar las preguntas planteadas.

El modelo estándar simplificado es _____________________.

Ejemplo 21. Para asistir a un evento social la familia García se trasladó de su rancho a la ciudad que está a 360 km. El papá y el hijo salieron al mismo tiempo, cada quien en su propio automóvil. El hijo maneja en promedio con una velocidad de 30 km/hr más rápido que el papá y llegó a la ciudad una hora antes. ¿Cuál fue la velocidad promedio del hijo?

Debes usar la siguiente *ley del movimiento: la velocidad constante o la velocidad promedio "**v**" se relaciona con la distancia recorrida "**d**" y el tiempo empleado "**t**" mediante la igualdad* $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{t}}$ (la velocidad es igual a la distancia recorrida entre el tiempo empleado). Las propiedades algebraicas permiten cambiar esta expresión de la siguiente forma: $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{v}}$ que es como la debes usar para la construcción del modelo matemático.

Solución. Considera la incógnita **x** = "velocidad promedio del hijo" y construye una ecuación cuadrática mediante la cual podamos contestar la pregunta planteada.

El modelo estándar simplificado es ______________________.

Ejemplo 22. Un tráiler recorrió 480 km trasladando mercancía; el viaje de regreso lo hizo sin carga ocupando cuatro horas menos con una velocidad promedio de 20 km/hr más rápido. ¿Con qué velocidad promedio hizo el recorrido con carga?

Solución. Elige la incógnita **x** y construye una ecuación cuadrática con la cual se resuelve el problema planteado.
El modelo estándar simplificado es ______________________.

Ejemplo 23. A una alberca con dimensiones olímpicas (50×25 metros) le construyeron una tira antiderrapante alrededor por la cual cobraron 316 m^2 de tira. ¿De cuánto fue el ancho de la tira?

Solución. Determina la incógnita **x** y elabora un dibujo que te ayude a construir una ecuación cuadrática que modele este problema.

El modelo estándar simplificado es ______________________.

Ejemplo 24. Un estudiante en el primer año de bachillerato ahorró $5,000 con el dinero de su beca, los cuales colocó en un fondo de inversiones capitalizable anualmente; dos años después, al haber concluido el bachillerato, retira su dinero, recibiendo $5,636. ¿A qué tasa de interés anual estuvo su inversión?

Un fondo de inversiones capitalizable anualmente se calcula del siguiente modo:

Capital al inicio del año + Interés generado en el año = Total de un año

en donde el interés generado en un año se calcula multiplicando el capital (la inversión) por la tasa de interés, por ejemplo $200 al 12% de interés genera $200 \times 0.12 = 24$ ($24 de interés); en este caso la *tasa de interés* es 0.12, que corresponde al 12 % de interés.

Solución. Determina la incógnita **x** y construye una ecuación cuadrática que modele este problema. Aquí tienes que aplicar dos veces la fórmula del total de un año.

El modelo estándar simplificado es ______________________.

Ejemplo 25. ¿A qué interés estuvo una inversión de $8000 en un fondo de inversiones capitalizable anualmente si en dos años rindió $10,035?20?

Solución. Determina la incógnita **x** y construye una ecuación cuadrática que modele este problema.

El modelo estándar simplificado es ______________________.

Para finalizar esta acción, en el siguiente ejemplo vas a construir el modelo matemático general para la *tasa de interés* "**x**" de un fondo de inversión capitalizable anualmente, con una inversión inicial de "**c**" pesos a dos años, la cual da un rendimiento total "**t**".

*Ejemplo 26. C*onstruye una ecuación cuadrática en la incógnita **x** = "tasa de interés en un fondo de inversión capitalizable en un año" para una inversión de "**c**" pesos, redituando en total "**t**" pesos en dos años.

Solución.

El modelo estándar simplificado es ______________________.

La fórmula con la que se calcula la tasa de interés de un fondo de inversión capitalizable anualmente se obtendrá en la última acción de esta unidad.

FIN DE LA ACCIÓN

ACCIÓN 2

SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA POR UN MÉTODO DE FACTORIZACIÓN

Objetivo: el alumno debe aprender a resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita, empleando para ello el método por factores.

> **AL ESTUDIANTE:** las soluciones de las ecuaciones las vas a ir estudiando siguiendo la clasificación que hemos dado. Primero trataremos el caso de las completas con a = 1 y luego con a ≠ 1. Después veremos las incompletas en sus dos versiones. En todos los casos, excepto en uno, ***el método matemático que se va a emplear se basa en la factorización y lo vamos a llamar "método por factores"*** que asume procedimientos de resolución según sea la forma de la ecuación.

*Recuerda que **factorizar** es escribir una suma o una resta como **producto**, donde cada término de la multiplicación recibe el nombre de **factor**.*

En la acción anterior vimos cómo construir el modelo para resolver problemas con ecuaciones cuadráticas en una incógnita, ahora estudiaremos el método por factores para obtener la solución de la ecuación.

Ejemplo 1. Estas tres casas están en la acera de la calle cuya numeración es de los impares y la suma del cuadrado de sus números es 83, ¿Qué número le corresponde a cada una de estas casas?

Solución. Ya vimos que el modelo correspondiente a la situación planteada es:

$$\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x} - 21 = 0$$

En el método por factores la ecuación se expresa en dos factores, mismos que vamos a representar con dos paréntesis de agrupamiento. Iniciemos la factorización escribiendo los factores del siguiente modo

$$\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x} - 21 = (\mathbf{x} + \quad)\,(\mathbf{x} - \quad)$$

Se completa la factorización poniendo el número 7 en el primer paréntesis y el 3 en el segundo como se muestra a continuación:

$$x^2 + 4x - 21 = (x + 7)(x - 3) = 0$$

Para que el producto sea cero cada uno de los factores debe ser igual a cero; resulta que el primer factor se hace cero cuando **x** = -7 y con **x** = 3 el segundo factor se hace igual a cero. Así pues, estos dos valores de **x** constituyen la solución de la ecuación.

Comprobación. En la siguiente tabla la primera columna muestra que **x** = -7 resuelve la ecuación, mientras que la segunda muestra lo mismo con **x** = 3.

$x^2 + 4x - 21 = 0$	$x^2 + 4x - 21 = 0$
Con $x = -7$	Con $x = 3$
$(-7)^2 + 4(-7) - 21 = 0$	$3^2 + 4\times3 - 21 = 0$
$49 - 28 - 21 = 0$	$9 + 12 - 21 = 0$
$49 - 49 = 0$	$21 - 21 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

Para responder la pregunta planteada en el ejemplo vemos que **x** = -7, por ser negativo, no puede ser el número de una casa. Por atraparte, la incógnita **x** se definió en la acción anterior como el número de la primera casa, entonces **x** = 3 es el número de la primera casa, 5 y 7 son los números de las casas que siguen.

Se impone la pregunta, ¿por qué se seleccionaron los números 3 y 7 para completar la factorización? La contestación te la dará el siguiente algoritmo.

ALGORITMO DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS EN UNA INCÓGNITA

El algoritmo para llevar a cabo el método de solución por factores para resolver una ecuación de segundo grado en una incógnita con a = 1 consta de los siguientes pasos:

1. Se empieza la factorización de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ igualándola con dos paréntesis (que son los factores) y se escribe la incógnita **x** en cada uno de ellos, del siguiente modo:

$$x^2 + bx + c = (x \quad)(x \quad)$$

2. En el primer factor después de **x** se escribe el signo del coeficiente b que tenga en la ecuación.

3. En el segundo factor después de **x** se coloca el signo que resulta de multiplicar los signos de los coeficientes b y c.

4. Cuando los signos de los dos factores son iguales (positivos o negativos) se buscan dos números que al sumarlos nos den el valor absoluto de b (el valor absoluto siempre es positivo) y que al multiplicarlos nos den el valor absoluto (siempre positivo) de c.

5. Cuando los signos de los dos factores son diferentes (uno positivo y otro negativo) se buscan dos números que al restarlos nos den el valor absoluto de b (que siempre es positivo) y que al multiplicarlos nos den el valor absoluto (siempre positivo) de c. El mayor de estos números es el que completa el primer factor y el menor completa el segundo factor, como se va a ver en los ejemplos. Esto explica ¿por qué en el ejemplo 1 tomamos los números 7 y 3? y ¿por qué los colocamos en ese orden?

Los pasos 4 y 5 son alternativos, o se aplica uno o se aplica el otro.

6. Teniendo la ecuación factorizada, la solución de la ecuación se encuentra utilizando la propiedad de los números reales que dice: *"si **un producto es igual a cero entonces uno de los factores del producto (o ambos) es cero**"*. Con esta propiedad, cada uno de los factores al igualarlos a cero se convierte en una ecuación lineal en una incógnita y la solución de cada una de estas dos ecuaciones conforman la solución de la ecuación cuadrática como se verá en los ejemplos que siguen.

Ejemplo 2. Resolución de la ecuación $\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4 = 0$.

a) Empezamos la factorización de la ecuación igualándola con dos paréntesis y escribiendo la incógnita **x** en cada uno de ellos, lo que nos da:

$$\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4 = (\mathbf{x} \quad)(\mathbf{x} \quad) = 0$$

b) En el primer paréntesis se escribe el signo del coeficiente b que en este caso es el signo "+". Así tenemos:

$$\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4 = (\mathbf{x} + \quad)(\mathbf{x} \quad) = 0$$

c) En el segundo paréntesis se coloca como signo el producto de los signos de los coeficientes b y c, que en nuestro caso es (+)(+) = +

$$\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4 = (\mathbf{x} + \quad)(\mathbf{x} + \quad) = 0$$

d) Como los signos de los factores son iguales se buscan dos números que al sumarlos nos den el valor de 5 y al multiplicarlos nos den el valor de 4. Estos números en este ejemplo son el 1 y el 4 y se coloca cada uno en un factor.

$$\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4 = (\mathbf{x} + 1)(\mathbf{x} + 4) = 0$$

e) Aplicamos el sexto paso del algoritmo con la propiedad de los números reales que volvemos a escribir: ***"si un producto está igualado a cero entonces uno de los factores (o ambos) es cero"***. Así para hallar la solución de la ecuación ya factorizada $\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4 = (\mathbf{x} + 1)(\mathbf{x} + 4) = 0$ hay que igualar con cero cada uno de los factores, es decir, $\mathbf{x} + 1 = 0$ y $\mathbf{x} + 4 = 0$. El primer factor se hace cero con el valor de $\mathbf{x} = -1$ y con $\mathbf{x}=-4$ se hace cero el segundo factor.

Por tanto, la solución de la ecuación $\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 4 = 0$ es $\mathbf{x_1} = -1$ y $\mathbf{x_2} = -4$.

Ejemplo 3. Resolución de la ecuación $\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 20 = 0$

a) Empezamos la factorización así: $\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 20 = (\mathbf{x} \quad)(\mathbf{x} \quad) = 0$

b) En el primer paréntesis escribimos el signo del coeficiente b que en este caso es el signo "-" porque b = -1. Así tenemos:

$$\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 20 = (\mathbf{x} - \quad)(\mathbf{x} \quad) = 0.$$

c) En este ejemplo b = -1 y c = -20, entonces el signo en el segundo paréntesis es (-)(-) = +.
Así queda: $\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 20 = (\mathbf{x} - \quad)(\mathbf{x} + \quad) = 0.$

d) Al ser diferentes los signos de los factores se aplica el paso 5 del algoritmo, el cual dice que se busquen dos números de tal forma que la resta sea 1 (que es el valor absoluto de b = -1) y que el producto debe ser igual a 20 (por ser el valor absoluto de c = -20), estos números son el 5 y el 4. Luego como el 5 es el mayor se coloca en el primer paréntesis y el 4 en el segundo factor. Así se obtiene la factorización.

$$\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 20 = (\mathbf{x} - 5)(\mathbf{x} + 4) = 0$$

e) Con $\mathbf{x} = 5$ el primer factor se hace cero y con $\mathbf{x} = -4$ es cero el segundo factor.

Por tanto, la solución de la ecuación $\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 20 = 0$ es $\mathbf{x_1} = 5$ y $\mathbf{x_2} = -4$.

Ejemplo 4. Resolución de la ecuación $\mathbf{x}^2 + \mathbf{x} - 42 = 0$

a) Desarrollando los pasos 1, 2 y 3 del algoritmo la factorización va tomando la forma $\mathbf{x}^2 + \mathbf{x} - 42 = (\mathbf{x} + \quad)(\mathbf{x} - \quad) = 0.$

b) De nuevo al ser diferentes los signos de los factores se aplica el paso 5 del algoritmo y para este ejemplo los números buscados son el 7 y el 6 debido a que la resta es $7 - 6 = 1$ (b = 1) y el producto es $7\times 6 = 42$

(c = -42). Escribiendo el mayor en el primer factor y el menor en el segundo factor se obtiene la factorización.

$$\mathbf{x}^2 + \mathbf{x} - 42 = (\mathbf{x} + 7)(\mathbf{x} - 6) = 0$$

c) Con $\mathbf{x}$ = -7 el primer factor se hace cero y con $\mathbf{x}$ = 6 se hace cero el segundo.

Por tanto, la solución de la ecuación $\mathbf{x}^2 + \mathbf{x} - 42 = 0$ es $\mathbf{x}_1 = -7$ y $\mathbf{x}_2 = 6$.

Ejemplo 5. Resolución de la ecuación $\mathbf{x}^2 - 12\mathbf{x} + 36 = 0$

a) Desarrollando los pasos 1, 2 y 3 del algoritmo la factorización va tomando la forma

$$\mathbf{x}^2 - 12\mathbf{x} + 36 = (\mathbf{x} - \quad)(\mathbf{x} - \quad) = 0$$

b) Al ser iguales los signos de los factores se aplica el paso 4 del algoritmo y los números buscados son el 6 y el 6 debido a que la suma es 6 + 6 = 12 (b = -12) y el producto es 6×6 = 36 (c = 36). Escribimos este número en los dos factores y la factorización es:

$$\mathbf{x}^2 - 12\mathbf{x} + 36 = (\mathbf{x} - 6)(\mathbf{x} - 6) = 0$$

c) Con $\mathbf{x}$ = 6 se hacen cero los dos factores.

Por tanto, la solución de la ecuación $\mathbf{x}^2 - 12\mathbf{x} + 36 = 0$ es $\mathbf{x} = 6$.

Esta factorización es un caso especial que se denomina *trinomio cuadrado perfecto,* si lo escribimos como $(\mathbf{x} - 6)^2 = \mathbf{x}^2 - 12\mathbf{x} + 36$ se lee *"el cuadrado del primero menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo"*, el cual será estudiado en la acción 4.

Ejemplo 6. Resolución de la ecuación $\mathbf{x}^2 - 19\mathbf{x} + 78 = 0$

a) Con los pasos 1, 2 y 3 del algoritmo la factorización toma la forma:

$$\mathbf{x}^2 - 19\mathbf{x} + 78 = (\mathbf{x} - \quad)(\mathbf{x} - \quad) = 0$$

b) Ahora al ser iguales los signos de los factores se aplica el paso 4 del algoritmo y en este caso las condiciones son buscar dos números que sumen 19 y al multiplicarlos den 78, ¿cuáles son estos dos números? Si con cálculo mental no los identificas, búscalos por ensayo y error: el 1 y el 18 suman 19 pero el producto no es 78; de igual forma el 2 y el 17 suman 19 pero el producto es 34, continúa de esta forma con el 3 y el 16 hasta que los encuentres y escríbelos en la factorización

$$\mathbf{x}^2 - 19\mathbf{x} + 78 = (\mathbf{x} - \underline{\quad})(\mathbf{x} - \underline{\quad}) = 0$$

c) Escribe a continuación los valores de $\mathbf{x}$ adecuados: con $\mathbf{x}$ = __ el primer factor se hace cero y con $\mathbf{x}$ = __ se hace cero el segundo factor.

Por tanto, la solución de la ecuación $\mathbf{x}^2 - 19\mathbf{x} + 78 = 0$ es $\mathbf{x_1}$ = __ y $\mathbf{x_2}$ = __.

Ejemplo 7. Resolución de la ecuación $\mathbf{x}^2 + 19\mathbf{x} - 216 = 0$

a) Para esta ecuación se inicia la factorización con los pasos 1, 2 y 3 así:

$$\mathbf{x}^2 + 19\mathbf{x} - 216 = (\mathbf{x} + \quad)(\mathbf{x} - \quad) = 0$$

b) De acuerdo con los signos de los factores se debe aplicar el paso 5, entonces hay que encontrar dos números cuya diferencia sea 19 y el producto sea 216. Si con un cálculo mental rápido no encuentras estos, aplica el siguiente procedimiento: inicia con los números 1 y 20, restados dan 19 pero su producto es 20, continua con el 2 y el 21 cuya diferencia es 19 pero el producto es 42 que está lejos de ser 216, entonces es recomendable que des un salto considerable, es decir, que no continúes con el 3 y el 22. Encuentra estos números y completa la factorización.

$$\mathbf{x}^2 + 19\mathbf{x} - 216 = (\mathbf{x} + \quad)(\mathbf{x} - \quad) = 0$$

c) Escribe a continuación los valores de $\mathbf{x}$ adecuados. Con $\mathbf{x}$ = __ el primer factor se hace cero y con $\mathbf{x}$ = __ se hace cero el segundo factor.

Por tanto, la solución de la ecuación $\mathbf{x}^2 + 19\mathbf{x} - 216 = 0$ es $\mathbf{x_1}$ = __ y $\mathbf{x_2}$ = __.

Ejemplo 8. Resolución de la ecuación $\mathbf{x}^2 + 22\mathbf{x} + 117 = 0$

a) Escribe el avance en la factorización con los pasos 1, 2 y 3.

$$\mathbf{x}^2 + 22\mathbf{x} + 117 = (\_\_\_\_\_)(\_\_\_\_\_).$$

b) Conforme a los signos de los factores, ¿qué paso del algoritmo se aplica? __. De acuerdo a las condiciones del paso que determinaste busca los dos números requeridos y escribe a continuación la factorización completa.

$$\mathbf{x}^2 + 22\mathbf{x} + 117 = (\qquad)(\qquad) = 0$$

c) Escribe los valores de $\mathbf{x}$ adecuados: con $\mathbf{x}$ = _____ el primer factor se hace cero y con $\mathbf{x}$ = ___ se hace cero el segundo factor.

Por tanto, la solución de la ecuación $\mathbf{x}^2 + 22\mathbf{x} + 117 = 0$ es $\mathbf{x_1}$ = __ y $\mathbf{x_2}$ = ___.

Continúa con este método de factorización para encontrar las soluciones de las siguientes ecuaciones.

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones usando el método por factores.

1. $\mathbf{x}^2 - 9\mathbf{x} - 10 = 0$. *2.* $\mathbf{x}^2 + 7\mathbf{x} - 60 = 0$. *3.* $\mathbf{x}^2 - 15\mathbf{x} + 26 = 0$.

4. $\mathbf{x}^2 + 10\,\mathbf{x} + 20 = 0$. *5.* $\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 56 = 0$. *6.* $\mathbf{x}^2 + 20\mathbf{x} + 84 = 0$.

7. $\mathbf{x}^2 + 8\mathbf{x} - 153 = 0$. *8.* $\mathbf{x}^2 - 14\mathbf{x} - 735 = 0$. *9.* $\mathbf{x}^2 - 158\mathbf{x} + 6225 = 0$.

10. Resuelve la ecuación cuadrática que construiste en el ejemplo 2 de la acción anterior y responde la pregunta que allí se hace.

11. Resuelve la ecuación cuadrática que construiste en el ejemplo 8 de la acción anterior y responde la pregunta que allí se hace.

12. Resuelve la ecuación cuadrática que construiste en el ejemplo 9 de la acción anterior y responde la pregunta que allí se hace.

13. Resuelve la ecuación cuadrática que construiste en el ejemplo 17 de la acción anterior y responde la pregunta que allí se hace.

> **AL ESTUDIANTE:** en todas las ecuaciones anteriores el coeficiente del término $\mathbf{x}^2$ ha sido a = 1, ahora vamos a tratar el caso con $a \neq 1$. El algoritmo para resolver la ecuación con el método por factores es esencialmente el mismo, salvo un pequeño detalle que hay que hacer al principio, el cual no es fácil de entender, por eso concéntrate y pon toda tu capacidad de razonamiento.

Ejemplo 9. En una zona ejidal cada parcela tiene media hectárea en forma rectangular, en donde el largo es el triple del ancho más 5 metros. ¿Cuáles son las dimensiones de cada parcela?

Solución. La ecuación cuadrática $3\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} - 5000 = 0$ con la incógnita **x** = "longitud del ancho de cada parcela" modela este problema y es la que se obtuvo en el ejemplo 7 de la acción anterior. Para calcular las dimensiones de las parcelas vamos a resolverla con el método de solución por factores.

a) En esta ecuación a = 3, por lo que antes de iniciar la factorización multiplicamos toda la ecuación por este valor, es decir $3(3\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} - 5000) = 3(0)$ y luego eliminamos el paréntesis de agrupamiento multiplicando cada término de la ecuación por 3, quedado $9\mathbf{x}^2 + 15\mathbf{x} - 15000 = 0$. Pero como podemos escribir a $9\mathbf{x}^2 = (3\mathbf{x})^2$ y $15\mathbf{x} = 5(3\mathbf{x})$, la ecuación la escribimos de la siguiente forma:

$$(3\mathbf{x})^2 + 5(3\mathbf{x}) - 15000 = 0$$

Con estas operaciones a la ecuación original con a = 3 y la incógnita **x** la hemos convertido en una ecuación con a = 1 y la incógnita es "3**x**".

b) Aplicamos el primer paso del método de factorización a la ecuación anterior, pero en vez de hacerlo en los factores (paréntesis) con **x** se hace ahora con 3**x** como se muestra a continuación:

$$(3\mathbf{x})^2 + 5(3\mathbf{x}) - 15000 = (3\mathbf{x}\quad)(3\mathbf{x}\quad) = 0$$

c) Los signos en los factores se colocan siguiendo exactamente los pasos 2 y 3 del método

$$(3\mathbf{x})^2 + 5(3\mathbf{x}) - 15000 = (3\mathbf{x} +\quad)(3\mathbf{x} -\quad) = 0$$

d) Aplicamos el paso 5 del método con los números 125 y 120 porque al ser los signos diferentes, se tiene que 125 –120 = 5 y 125×120 = 15000 y siendo 125 el mayor, la factorización queda:

$$(3\mathbf{x})^2 + 5(3\mathbf{x}) - 15000 = (3\mathbf{x} + 125)(3\mathbf{x} - 120) = 0$$

e) Con $\mathbf{x} = -\frac{125}{3}$ el primer factor se hace cero y **x** = 40 hace cero el segundo factor.

Por tanto, la solución de la ecuación $3\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} - 5000 = 0$ es $\mathbf{x_1} = -\frac{125}{3}$ y $\mathbf{x_2} = 40$.

Como el ancho de un terreno no puede ser negativo, entonces las parcelas tienen 40 m de ancho por 125 m de largo.

Ejemplo 10. Resolución de la ecuación $3\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} - 8 = 0$

a) En esta ecuación a = 3 y el primer paso es multiplicar toda la ecuación por 3, es decir $3(3\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} - 8) = 0$, si eliminamos el paréntesis de agrupamiento la ecuación es $9\mathbf{x}^2 + 15\mathbf{x} - 24 = 0$. Ahora escribiendo $9\mathbf{x}^2 = (3\mathbf{x})^2$ y $15\mathbf{x} = 5(3\mathbf{x})$, la ecuación toma la forma:

$$(3\mathbf{x})^2 + 5(3\mathbf{x}) - 24 = 0$$

b) Aplicamos el primer paso del método de factorización a la ecuación anterior, pero en vez de hacerlo en los factores (paréntesis) con **x** se hace ahora con 3**x** como se muestra a continuación:

$$(3\mathbf{x})^2 + 5(3\mathbf{x}) - 24 = (3\mathbf{x}\quad)(3\mathbf{x}\quad) = 0$$

c) Los signos en los factores se colocan siguiendo exactamente los pasos 2 y 3 del método

$$(3\mathbf{x})^2 + 5(3\mathbf{x}) - 24 = (3\mathbf{x} + \quad)(3\mathbf{x} - \quad) = 0$$

d) Al ser los signos diferentes aplicamos el paso 5 del método con los números 3 y 8 porque 8 – 3 = 5 y 3×8 = 24 y como 8 el mayor, la factorización queda:

$$(3\mathbf{x})^2 + 5(3\mathbf{x}) - 24 = (3\mathbf{x} + 8)(3\mathbf{x} - 3) = 0$$

e) Con $\mathbf{x} = -\frac{8}{3}$ el primer factor se hace cero y con $\mathbf{x} = 1$ es cero el segundo factor.

Por tanto, la solución de la ecuación $3\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} - 8 = 0$ es $\mathbf{x_1} = -\frac{8}{3}$ y $\mathbf{x_2} = 1$.

Ejemplo 11. Resolución de la ecuación $2\mathbf{x}^2 - 7\mathbf{x} + 5 = 0$

a) Como en esta ecuación a = 2, entonces hay que multiplicar toda la ecuación por 2, es decir $2(2\mathbf{x}^2 - 7\mathbf{x} + 5) = 2(0)$. Multiplicando cada término de la ecuación por 2 queda $4\mathbf{x}^2 - 14\mathbf{x} + 10 = 0$. Si escribimos $4\mathbf{x}^2 = (2\mathbf{x})^2$ y $14\mathbf{x} = 7(2\mathbf{x})$, la ecuación toma la forma:

$$(2\mathbf{x})^2 - 7(2\mathbf{x}) + 10 = 0$$

b) Aplicando a la ecuación anterior el primer paso del método de factorización, con $2\mathbf{x}$ en los factores y colocando los signos de acuerdo a los pasos 2 y 3 del algoritmo nos queda:

$$(2\mathbf{x})^2 - 7(2\mathbf{x}) + 10 = (2\mathbf{x} - \quad)(2\mathbf{x} - \quad) = 0$$

c) Al ser los signos iguales aplicamos el paso 4 del método con los números 2 y 5 porque 2 + 5 = 7 y 2×5 = 10, luego la factorización es:

$$(2\mathbf{x})^2 - 7(2\mathbf{x}) + 10 = (2\mathbf{x} - 2)(2\mathbf{x} - 5) = 0$$

d) Con $\mathbf{x} = 1$ el primer factor se hace cero y con $\mathbf{x} = \frac{5}{2}$ el segundo factor se hace cero.

Por tanto, la solución de la ecuación $2\mathbf{x}^2 - 7\mathbf{x} + 5 = 0$ es $\mathbf{x_1} = 1$ y $\mathbf{x_2} = \frac{5}{2}$.

Ejemplo 12. Resolución de la ecuación $6\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} - 14 = 0$

a) En este caso multiplicamos la ecuación por 6 porque a = 6 y la escribimos en la forma $(6\mathbf{x})^2 - 8(6\mathbf{x}) - 84 = 0$. Luego iniciamos la factorización aplicando los pasos 1, 2 y 3 del algoritmo, los avances se muestran a continuación:

$$(6\mathbf{x})^2 - 8(6\mathbf{x}) - 84 = (6x - \quad)(6x + \quad) = 0$$

b) Como los signos son diferentes hay que aplicar el paso 5, es decir, hay que buscar dos números que restados den 8 y al multiplicarlos el resultado sea 84, ¿cuáles son estos números? ____ y ____. Para terminar la factorización escríbelos a continuación como lo indica el paso 5:

$$(6\mathbf{x})^2 - 8(6\mathbf{x}) - 84 = (6x - \quad)(6x + \quad) = 0$$

c) ¿Con qué valor de $\mathbf{x}$ = ___ el primer factor se hace cero?, ¿y con $\mathbf{x}$ = ___ el segundo factor se hace cero?

Por tanto, la solución de la ecuación $6\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} - 14 = 0$ es $\mathbf{x_1}$ = _____ y $\mathbf{x_2}$ = _____.

Ejemplo 13. Resolución de la ecuación $4\mathbf{x}^2 + 6\mathbf{x} + 2 = 0$

a) En este caso se multiplica la ecuación por ____ porque a = ____ y se escribe en la forma $(4\mathbf{x})^2 + 6(4\mathbf{x}) +$ ____ = 0. Luego la factorización aplicando los pasos 1, 2 y 3 del algoritmo toma la forma:

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} = (\qquad)(\qquad) = 0$$

b) Como los signos son ________ hay que aplicar el paso __, es decir, hay que buscar dos números que _______ den __ y al multiplicarlos el resultado sea ___, ¿cuáles son estos números? ____ y ____. Para terminar la factorización escríbelos a continuación:

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} = (\qquad)(\qquad) = 0$$

c) ¿Con qué valor de $\mathbf{x}$ = ___ el primer factor se hace cero?, ¿y con qué valor de $\mathbf{x}$ = ____ el segundo factor se hace cero?

Por tanto, la solución de la ecuación $4\mathbf{x}^2 + 6\mathbf{x} + 2 = 0$ es $\mathbf{x_1}$ = _____ y $\mathbf{x_2}$ = _____

Ejemplo 14. Resolución de la ecuación $9\mathbf{x}^2 + 6\mathbf{x} + 1 = 0$.

a) Al ser a = 9, la ecuación se multiplica por __, lo que nos permite escribirla en la forma $(\_\_\_\_)^2 + 6(\_\_\_\_) + 9 = 0$. Luego aplicando los pasos 1, 2 y 3 del algoritmo, los avances de la factorización son:

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} = (\underline{\qquad\quad})(\underline{\qquad\quad})$$

b) Como los signos son iguales hay que aplicar el paso 4, es decir, hay que buscar dos números que _______ den __ y al multiplicarlos el resultado sea ___, ¿cuáles son estos números? ___ y ___. Para terminar escribe la factorización a continuación:

_______________ = (_______)(_______)= 0

c) ¿Con qué valor de $\mathbf{x}$ = ___ el primer factor se hace cero?, ¿y con qué valor de $\mathbf{x}$ = __ el segundo factor se hace cero?

Por tanto, la solución de la ecuación $9\mathbf{x}^2 + 6\mathbf{x} + 1 = 0$ es $\mathbf{x_1}$ = ___ y $\mathbf{x_2}$ = ___.

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones con el método por factores.

1. $3\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} - 8 = 0$. *2.* $20\mathbf{x}^2 + 3\mathbf{x} - 2 = 0$. *3.* $5\mathbf{x}^2 - 10\mathbf{x} + 5 = 0$.

4. $10\mathbf{x}^2 + 7\mathbf{x} - 6 = 0$. *5.* $6\mathbf{x}^2 - 7\mathbf{x} - 3 = 0$. *6.* $2\mathbf{x}^2 + 16\mathbf{x} + 32 = 0$.

7. $6\mathbf{x}^2 + 29\mathbf{x} - 120 = 0$. *8.* $4\mathbf{x}^2 - 24\mathbf{x} - 1408 = 0$. *9.* $7\mathbf{x}^2 - 327\mathbf{x} + 540 = 0$.

10. Resuelve la ecuación cuadrática que construiste en el ejemplo 7 de la acción anterior y responde la pregunta que allí se hace.

11. Resuelve la ecuación cuadrática que construiste en el ejemplo 18 de la acción anterior y responde la pregunta que allí se hace.

MÉTODO DE FACTORIZACIÓN PARA LAS ECUACIONES INCOMPLETAS

a. DE LA FORMA $ax^2 + bx = 0$

En este caso el método por factores se simplifica y el algoritmo se reduce a dos pasos:

1. Se factoriza $\mathbf{x}$ en la ecuación $a\mathbf{x}^2 + b\mathbf{x} = 0$ de la siguiente forma $\mathbf{x}(a\mathbf{x} + b) = 0$.

2. Los dos valores que satisfacen la ecuación están dados por $\mathbf{x_1} = 0$ y $\mathbf{x_2} = -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$
.

Observemos que, al quedar $\mathbf{x}$ como un factor en el primer paso, entonces $\mathbf{x} = 0$ va a ser forzosamente una solución siempre.

Ejemplo 15. En el salón de clase, una maestra pone en práctica una actividad que diseñó para que los niños desarrollen sus habilidades de razonamiento y de cálculo aritmético. Les dice que dibujen un cuadrado de tamaño medio, acto seguido los pone a recortar el cuadrado y después a que corten 4 cm a dos lados para formar otro cuadrado. Luego pide que midan el área del cuadrado que obtuvieron, a lo cual Pepito responde que el suyo tiene un área de 16 cm^2; finalmente la maestra les pide que contesten las siguientes preguntas: ¿cuánto medía el área del cuadrado que dibujaron originalmente?, y ¿cuánto mide el área que recortaron al cuadrado original? Además, con lo recortado se forma un cuadrado y dos rectángulos, ¿cuánto mide el área de cada una de estas figuras?

El modelo matemático para contestar todas las preguntas se obtuvo en la acción anterior y es:

$$\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} = 0$$

Solución.

a) Se factoriza $\mathbf{x}$ en la ecuación $\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} = 0$ de la siguiente forma,

$$\mathbf{x}(\mathbf{x} - 8) = 0.$$

b) Los dos valores que satisfacen la ecuación están dados por

$$\mathbf{x_1} = 0 \text{ y } \mathbf{x_2} = 8.$$

Las respuestas a las preguntas del problema son: el cuadrado que originalmente dibujó Pepito es de 8 cm en cada lado, por lo que el área es $8^2 = 64$ cm^2. Al cortar 4 cm a dos lados dividió el cuadrado en cuatro cuadrados iguales, por tanto, el área recortada es $3\times16 = 48$ cm^2 que corresponde a tres cuadrados de igual tamaño.

Ejemplo 16. Resolución de la ecuación $2\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} = 0$.

Solución.

a) Se factoriza **x** en la ecuación $2\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} = 0$ de la siguiente forma $\mathbf{x}(2\mathbf{x} + 5) = 0$.

b) Los dos valores que satisfacen la ecuación están dados por $\mathbf{x_1} = 0$ y $\mathbf{x}_2 = -\frac{5}{2}$

Ejemplo 17. Resolución de la ecuación $5\mathbf{x}^2 + 15\mathbf{x} = 0$.

Solución. En la ecuación $5\mathbf{x}^2 + 15\mathbf{x} = 0$ se puede factorizar $5\mathbf{x}$ de la siguiente forma $5\mathbf{x}(\mathbf{x} + 3) = 0$.

Los dos valores que satisfacen la ecuación son: $\mathbf{x_1} = 0$ y $\mathbf{x_2} = -3$.

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones usando el método por factores.

1. $\mathbf{x}^2 + 35\mathbf{x} = 0$. *2.* $9\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} = 0$. *3.* $7\mathbf{x}^2 + 19\,\mathbf{x} = 0$.

4. Resuelve la ecuación cuadrática que construiste en el ejemplo 11 de la acción anterior y responde la pregunta que allí se hace.

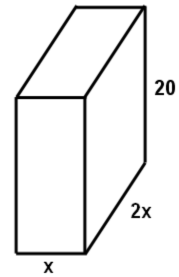
ECUACIONES DE LA FORMA $\mathbf{ax^2 + c = 0}$

a. El algoritmo se obtiene despejando **x** en la ecuación, al pasar **c** al lado derecho de la igualdad con signo cambiado y dividiendo entre **a** se llega a:

$$\mathbf{x}^2 = -\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}$$

b. Extrayendo raíz cuadrada a los dos lados de la igualdad: $\mathbf{x} = \pm\sqrt{-\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}}$.

De este modo, la solución de la ecuación es $\mathbf{x}_1 = -\sqrt{-\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}}$, $\mathbf{x}_2 = \sqrt{-\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{a}}}$.



Ejemplo 18. Una fábrica de aceite de olivo va a lanzar al mercado un nuevo producto fabricado con una cosecha muy especial y lo va a hacer en una presentación de lujo. El diseñador del envase quiere que sea un bote de lámina con capacidad de un litro (1000 cm^3), con 20 cm de alto y la base debe ser rectangular con el largo igual al doble del ancho. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la base del bote?

Solución. La ecuación estándar en términos de la incógnita **x** se calculó en ejemplo 3 de la acción anterior y es

$$\mathbf{x^2} - 25 = 0$$

Para resolver esta ecuación pasamos 25 al lado derecho de la igualdad $\mathbf{x^2} = 25$. Luego sacamos la raíz cuadrada y se obtiene $\mathbf{x} = \pm\sqrt{25} = \pm 5$, o sea $\mathbf{x_1} = -5$ y $\mathbf{x_2} = 5$.

La respuesta al problema es 5 cm de ancho y 10 cm de largo

Ejemplo 19. Resolución de la ecuación $5\mathbf{x}^2 - 20 = 0$.

Solución. Despejando $\mathbf{x^2}$ nos queda $\mathbf{x}^2 = \frac{20}{5} = 4$, luego extrayendo la raíz cuadrada se obtiene $\mathbf{x} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$. Por tanto, la solución de la ecuación es: $\mathbf{x_1} = -2$ y $\mathbf{x_2} = 2$.

Ejemplo 20. Resolución de la ecuación $12\mathbf{x}^2 - 36 = 0$.

Solución. Despejamos $\mathbf{x}^2 = \frac{36}{12} = 3$ y extraemos la raíz cuadrada $\mathbf{x} = \pm\sqrt{3}$. Ahora como $\sqrt{3}$ no es exacta, la solución de la ecuación la expresamos como: $\mathbf{x_1} = -\sqrt{3}$ y $\mathbf{x_2} = \sqrt{3}$, o bien damos una aproximación decimal $\mathbf{x_1} = -1.732$ y $\mathbf{x_2} = 1.732$.

Otra forma de resolver este tipo de ecuaciones (de la forma $\mathbf{ax^2 + c = 0}$), se basa en la solución del producto de:

$$(x+a)(x-a)=x^2-ax+ax-a^2$$
$$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$$

A la siguiente forma de factorizar expresiones de la forma:
$\mathbf{(x+a)(x-a)=x^2-a^2}$
Se le conoce como ***diferencia de cuadrados***

Ejemplo 21. Resolviendo la ecuación $x^2 - 25 = 0$, por diferencia de cuadrados se tiene que:

$$x^2 - 25 = 0$$
$$x^2 - (5)^2 = 0$$
$$(x+5)(x-5)=0$$

Solución: En este paso volvemos a aplicar la expresión:

Si el producto de factores es cero entonces algún factor es igual a cero

Por lo que si suponemos que:

$x-5=0$ la solución es $x=5$

Ahora si suponemos que:

$x+5=0$ la solución es $x=-5$

Ejemplo 22. Resolución de la ecuación $5\mathbf{x}^2 - 20 = 0$ por diferencia de cuadrados.

Solución: Debemos de reescribir 5 y 20 de la siguiente forma:

$$5 = (\sqrt{5})^2$$
$$20 = (20)^2$$

Sustituyendo:

$$5x^2 - 20 = 0$$
$$\left(\sqrt{5}\right)^2 (\mathrm{x})^2 - \left(\sqrt{20}\right)^2 = 0$$
$$\left(\sqrt{5}\mathrm{x}\right)^2 - \left(\sqrt{20}\right)^2 = 0$$

Factorizando:

$$\left(\sqrt{5}\mathrm{x} + \sqrt{20}\right)\left(\sqrt{5}\mathrm{x} - \sqrt{20}\right) = 0$$

Resolviendo:

$$\sqrt{5}\mathrm{x} + \sqrt{20} = 0$$
$$x = -\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = -\sqrt{\frac{20}{5}} = -\sqrt{4} = -2$$

$$x=-2$$

Continuando:

$$\sqrt{5}\mathrm{x} - \sqrt{20} = 0$$
$$\mathrm{x} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$$

$$x=2$$

Por lo tanto, las soluciones son: $x_1=-2$ y $x_2=2$

Ejemplo 23. Resolución de la ecuación 12$\mathbf{x}^2$ – 36 = 0 por diferencia de cuadrados.
Solución:
12$\mathbf{x}^2$ – 36 = 0
Reescribiendo a 12 como:

$$12 = \left(\sqrt{12}\right)^2$$

Reescribiendo a 36 como:

$$36 = (6)^2$$

Sustituyendo:

$$12x^2 - 36 = 0$$
$$\left(\sqrt{12}\right)^2 (x)^2 - (6)^2 = 0$$
$$\left(\sqrt{12}x\right)^2 - (6)^2 = 0$$

Factorizando:

$$\left(\sqrt{12}x + 6\right)\left(\sqrt{12}x - 6\right) = 0$$

Resolviendo:

$$\sqrt{12}x + 6 = 0$$
$$x = -\frac{6}{\sqrt{12}}$$

$$x=-1.732$$

Continuando: $\sqrt{12}x - 6 = 0$

$$x = \frac{6}{\sqrt{12}} = 1.732$$

Por lo tanto, las soluciones son: x_1=-1.732 y x_2=1.732
UNA NOTA FINAL: la ecuación **x^2 + 4= 0** no tiene solución debido a que al despejar la incógnita **x** se tiene **x** = $\sqrt{-4}$ y la raíz cuadrada de un número negativo no existe. Observa que para el caso de la ecuación cuadrática en la que b = 0, el signo de c debe ser negativo para que la ecuación tenga dos soluciones. Veamos esto con un último ejemplo:

Ejemplo 24. Resolución de la ecuación 2$\mathbf{x}^2$ – 162 = 0.

Solución. En este caso c es negativa (c = -162) y al pasarla al lado derecho de la igualdad queda con signo positivo 2$\mathbf{x}^2$ = 162, despejando $\mathbf{x}^2$ tenemos $\mathbf{x}^2$ = $\frac{162}{2}$ = 81, al extraer la raíz cuadrada se despeja la incógnita **x** obteniendo **x** = $\pm\sqrt{81}$ = ±9. Así la solución de la ecuación es $\mathbf{x}_1$ = -9 y $\mathbf{x}_2$ = 9.

En cambio, si la ecuación es 2$\mathbf{x}^2$ + 162 = 0 al despejar **x** se obtiene **x** = $\pm\sqrt{-81}$ y esta raíz cuadrada no representa ningún número real.

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones por el método visto aquí.

1. . $\mathbf{x}^2 - 49 = 0$. *2.* $9\mathbf{x}^2 - 1 = 0$. *3.* $4\mathbf{x}^2 + 121 = 0$.

3. Resuelve la ecuación cuadrática que construiste en el ejemplo 5 de la acción anterior y responde la pregunta que allí se hace.

4. Resuelve la ecuación cuadrática que construiste en el ejemplo 6 de la acción anterior y responde la pregunta que allí se hace.

5. Resuelve la ecuación cuadrática que construiste en el ejemplo 13 de la acción anterior y responde la pregunta que allí se hace.

FIN DE LA ACCIÓN

ACCIÓN 3

ANTECEDENTES ALGEBRAICOS PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA EN UNA INCÓGNITA POR MEDIO DE UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Objetivo: el alumno debe saber convertir un binomio en un trinomio cuadrado perfecto.

> **AL ESTUDIANTE:** para desarrollar el tema de factorización completando a un trinomio cuadrado perfecto y la fórmula general tenemos que analizar primero qué es un trinomio cuadrado perfecto para después ver cómo aplicamos este concepto para completar un binomio a un trinomio cuadrado perfecto.

DESARROLLO DE UN BINOMIO AL CUADRADO

Ejemplo 1. ¿Puedes desarrollar el siguiente binomio al cuadrado: $(\mathbf{x} + 4)^2$? En caso afirmativo desarróllalo $(\mathbf{x} + 4)^2 =$ __________________________. De no ser así, obtengamos el resultado multiplicando **x** + 4 por **x** + 4 de la siguiente forma.

$$\begin{array}{r} \mathbf{x} + 4 \\ \underline{\mathbf{x} + 4} \\ \mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x} \\ \underline{+ 4\mathbf{x} + 16} \\ \mathbf{x}^2 + 8\mathbf{x} + 16 \end{array}$$

Ejemplo 2. Desarrolla el cuadrado del binomio $(\mathbf{x} - 7)^2 =$ ____________________. Corroboremos tu respuesta haciendo a continuación la multiplicación de **x** – 7 por sí mismo.

$$\begin{array}{r} \mathbf{x} - 7 \\ \underline{\mathbf{x} - 7} \\ \mathbf{x}^2 - 7\mathbf{x} \\ \underline{- 7\mathbf{x} + 49} \\ \mathbf{x}^2 - 14\mathbf{x} + 49 \end{array}$$

Ejemplo 3. Desarrolla el cuadrado del binomio $(\mathbf{x} + 9)^2 =$ ____________________. Corrobora tu respuesta en el siguiente espacio.

Ejemplo 4. Desarrolla el cuadrado del binomio $(\mathbf{x} - 11)^2$ = __________________.
Corrobora tu respuesta en el siguiente espacio.

Ejemplo 5. Desarrolla el cuadrado del binomio. $(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2$ = ___________________.
Corrobora tu respuesta.

Ejemplo 6. Desarrolla el cuadrado del binomio $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2$ = ___________________.
Corrobora tu respuesta.

La expresión** $x^2 \pm 2xy + y^2$ **se llama TRINOMIO CUADRADO PERFECTO
Porque es igual a un binomio elevado al cuadrado** $(x \pm y)^2$**. Así tenemos

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

El desarrollo del binomio elevado al cuadrado lo decimos verbalmente como *"el cuadrado del primer término más (o menos) el doble del primero por el segundo término más el cuadrado del segundo término"*.

Ejemplo 7. Desarrolla el cuadrado del binomio $(3\mathbf{x} + 5)^2$ = ___________________.
Corrobora tu respuesta en el siguiente espacio.

Ejemplo 8. Desarrolla el cuadrado del binomio $(8\mathbf{x} - 1)^2$ = __________________.
Corrobora tu respuesta en el siguiente espacio.

CONVERTIR UN BINOMIO EN UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

AL ESTUDIANTE: en los siguientes ejemplos trabajaras un procedimiento algebraico que se utiliza como un método de factorización para ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 \pm bx \; con \; a \neq 0$, notaras que no hay ninguna igualdad, solo transformaras esa expresión para que la puedas escribir como un binomio al cuadrado. Más adelante usaras el método para resolver una ecuación.

Ejemplo 9. Completar el binomio $\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x}$ en un trinomio que sea cuadrado perfecto.

Solución. En el binomio $\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x}$ ya tenemos expresado el cuadrado del primer término y "$4\mathbf{x}$" es el doble del primero por el segundo, por lo que 4 es el doble del segundo, de esto resulta que el segundo término es la mitad de 4, o sea 2. Luego, el trinomio cuadrado perfecto es $\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x} + 4$.

Así, el binomio $\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x}$ lo completamos en el trinomio cuadrado perfecto $\mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x} + 4$, con lo cual tenemos

$$(\mathbf{x} + 2)^2 = \mathbf{x}^2 + 4\mathbf{x} + 4$$

Ejemplo 10. Completar el binomio $\mathbf{x}^2 - 6\mathbf{x}$ en un trinomio que sea cuadrado perfecto.

Solución. En el binomio $\mathbf{x}^2 - 6\mathbf{x}$ está el cuadrado del primer término y "$6\mathbf{x}$" es el doble del primero por el segundo, por lo que 6 es el doble del segundo, de lo cual resulta que el segundo término es la mitad de 6, o sea 3, por lo que el cuadrado del segundo término es 9. Luego, el trinomio cuadrado perfecto es $\mathbf{x}^2 - 6\mathbf{x} + 9$.

Así, al sumarle el número 9 al binomio $\mathbf{x}^2 - 6\mathbf{x}$ lo hemos completado en un trinomio cuadrado perfecto.

$$(\mathbf{x} - 3)^2 = \mathbf{x}^2 - 6\mathbf{x} + 9$$

Ejemplo 11. Completar el binomio $\mathbf{x}^2 - 11\mathbf{x}$ en un trinomio que sea cuadrado perfecto.

Solución. Al ser $11\mathbf{x}$ el doble del primer término por el segundo, siendo $\mathbf{x}$ el primero, entonces el segundo término es $\frac{11}{2}$. El cuadrado del segundo es $\left(\frac{11}{2}\right)^2 = \frac{121}{4}$. Con este valor completamos el trinomio cuadrado perfecto

$$\left(\mathbf{x} - \frac{11}{2}\right)^2 = \mathbf{x}^2 - 11\mathbf{x} + \frac{121}{4}$$

AL ESTUDIANTE: el aprendizaje se facilita mucho con la práctica de este tipo de ejemplos, para lo cual puedes utilizar un proceso algorítmico que sintetiza operacionalmente lo que acabas de ver.

Para completar el binomio $\mathbf{x}^2 \pm b\mathbf{x}$ en un trinomio que sea cuadrado perfecto se suma la mitad de b elevado al cuadrado.

$$\left(\mathbf{x} \pm \frac{\mathbf{b}}{2}\right)^2 = \mathbf{x}^2 \pm \mathbf{bx} + \frac{\mathbf{b}^2}{4}$$

Ejemplo 12. Completar el binomio $\mathbf{x^2} + 2.7\mathbf{x}$ en un trinomio que sea cuadrado perfecto.

Solución. Aplicando el algoritmo se completa el trinomio sumando $\left(\frac{2.7}{2}\right)^2 = (1.35)^2$. Nos queda:

$$\left(\mathbf{x} + \frac{2.7}{2}\right)^2 = \mathbf{x}^2 + 2.7\mathbf{x} + \left(\frac{2.7}{2}\right)^2 \text{ o sea}$$

$$(\mathbf{x} + 1.35)^2 = \mathbf{x}^2 + 2.7\mathbf{x} + 1.8225$$

Ejemplo 13. Completar el binomio $\mathbf{x}^2 - 5.8\mathbf{x}$ en un trinomio que sea cuadrado perfecto.

Solución. Aplicando el algoritmo se completa el trinomio sumando $\left(\frac{5.8}{2}\right)^2 = (2.9)^2$.

Nos queda

$$(\mathbf{x} - 2.9)^2 = \mathbf{x}^2 - 5.8\mathbf{x} + 8.41$$

Ejemplo 14. Completar el binomio $\mathbf{x^2} + 2\mathbf{xy}$ en un trinomio que sea cuadrado perfecto.

Solución. En el binomio $\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{xy}$ el doble del primero por el segundo es 2**xy** y como el número 2 significa el doble y **x** es el primero entonces **y** tiene que ser el segundo, por tanto, si completamos el binomio $\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{xy}$ adicionando $\mathbf{y}^2$ tenemos el trinomio cuadrado perfecto $\mathbf{x^2} + 2\mathbf{xy} + \mathbf{y^2}$. O sea:

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y})^2 = \mathbf{x}^2 + 2\mathbf{xy} + \mathbf{y}^2$$

Ejemplo 15. Completar el binomio $\mathbf{x^2} - 16\mathbf{xy}$ en un trinomio que sea cuadrado perfecto.

Solución. Razonando en forma análoga como en el ejemplo anterior, tenemos que $16\mathbf{xy}$ es el doble del primero por el segundo y siendo $\mathbf{x}$ el primero, entonces $8\mathbf{y}$ es el segundo y $64\mathbf{y}^2$ es el cuadrado del segundo, por tanto, $\mathbf{x}^2 - 16\mathbf{xy} + 64\mathbf{y}^2$ es un trinomio cuadrado perfecto. Es decir:

$$(\mathbf{x} - 8\mathbf{y})^2 = \mathbf{x}^2 - 16\mathbf{xy} + 64\mathbf{y}^2$$

Ejemplo 16. Completar el binomio $\mathbf{x}^2 + 9\mathbf{xy}$ en un trinomio que sea cuadrado perfecto.

Solución. Con el mismo razonamiento, se tiene que $9\mathbf{xy}$ es el doble del primero por el segundo y siendo $\mathbf{x}$ el primero, entonces $\frac{9}{2}\mathbf{y} = 4.5\mathbf{y}$ es el segundo y $\frac{81}{4}\mathbf{y}^2 = 20.25\mathbf{y}^2$ es el cuadrado del segundo, por tanto, $\mathbf{x}^2 + 9\mathbf{xy} + \frac{81}{4}\mathbf{y}^2$ es un trinomio cuadrado perfecto. Es decir:

$$(\mathbf{x} + 4.5\mathbf{y})^2 = \mathbf{x}^2 + 9\mathbf{xy} + 20.25\mathbf{y}^2$$

Ejemplo 17. Completar el binomio $4\mathbf{x}^2 + 20\mathbf{x}$ en un trinomio que sea cuadrado perfecto.

Solución. El binomio $4\mathbf{x}^2 + 20\mathbf{x}$ lo podemos expresar en la forma $(2\mathbf{x})^2 + 10(2\mathbf{x})$, puesto así resulta que $(2\mathbf{x})^2$ es el cuadrado del primer término, es decir $2\mathbf{x}$ es el primero y $10(2\mathbf{x})$ es el doble del primero por el segundo, por lo que 10 es el doble del segundo, de esto resulta que el segundo término es la mitad de 10, o sea 5. Luego, el trinomio cuadrado perfecto es $4\mathbf{x}^2 + 20\mathbf{x} + 25$.

Así, el binomio $4\mathbf{x}^2 + 20\mathbf{x}$ lo completamos en el trinomio cuadrado perfecto $4\mathbf{x}^2 + 20\mathbf{x} + 25$, con lo cual tenemos

$$(2\mathbf{x} + 5)^2 = 4\mathbf{x}^2 + 20\mathbf{x} + 25$$

Ejemplo 18. Completar el binomio $9\mathbf{x}^2 - 15\mathbf{x}$ en un trinomio que sea cuadrado perfecto.

Solución. Razonando de igual forma que en ejemplo anterior tenemos que el binomio
$9\mathbf{x}^2 - 15\mathbf{x} = (3\mathbf{x})^2 - 5(3\mathbf{x})$ en donde el primer término es $3\mathbf{x}$ y $5(3\mathbf{x})$ es el doble del primero por el segundo, por lo que $\frac{5}{2}$ es el segundo término. Luego, el trinomio cuadrado perfecto es
$9\mathbf{x}^2 - 15\mathbf{x} + \frac{25}{4}$. Así se tiene que:

$$(3\mathbf{x} - 2.5)^2 = 9\mathbf{x}^2 - 15\mathbf{x} + 6.25$$

EJERCICIOS

Completa los siguientes binomios a un trinomio cuadrado perfecto.

1. $\mathbf{x}^2 - 10\mathbf{x}$. *2.* $\mathbf{x}^2 + 8\mathbf{x}$. *3.* $\mathbf{x}^2 - 13\mathbf{x}$. *4.* $\mathbf{x}^2 + 25\mathbf{x}$.

5. $\mathbf{x}^2 - 3.4$. *6.* $\mathbf{x}^2 + 6.3\mathbf{x}$. *7.* $\mathbf{x}^2 - 6\mathbf{xy}$. *8.* $\mathbf{x}^2 + 15\mathbf{xy}$.

9. $16\mathbf{x}^2 + 12\mathbf{x}$. *10.* $25\mathbf{x}^2 - 30\mathbf{x}$.

FIN DE LA ACCIÓN

ACCIÓN 4

SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS CON UNA INCÓGNITA POR EL MÉTODO DE FACTORIZACIÓN COMPLETANDO UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Objetivo: el alumno debe aprender a resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita, empleando para ello el método del trinomio cuadrado perfecto.

> **AL ESTUDIANTE:** el método del trinomio es muy poderoso y si lo dominas muy bien tu capacidad de aprendizaje del álgebra dará un gran salto. La clave es que entiendas claramente los significados de cada paso que debes realizar para resolver la ecuación cuadrática.

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA CON $a = 1$, POR EL MÉTODO DEL TRINOMIO

Ejemplo 1. Los colonos de una calle aportaron $20,000 para las mejoras de dicha calle, repartiéndose cada casa su cooperación en partes iguales. Se dieron cuenta de que, si hubieran participado las 20 casas que están deshabitadas, cada casa habría contribuido con $50 menos. ¿Cuántas casas están habitadas en esa calle?, ¿y de cuánto fue la cooperación por cada casa?

Solución. La ecuación cuadrática $\mathbf{x}^2 + 20\mathbf{x} - 8000 = 0$ en la incógnita $\mathbf{x}$ = "número de casas habitadas" que modela este problema la construiste en el ejemplo 19 de la acción **1**. Resolvamos esta ecuación por el método del trinomio:

Este método se inicia completando el binomio $\mathbf{x}^2 + 20\mathbf{x}$ a un trinomio cuadrado perfecto, para ello sabemos de la acción anterior que sumando 100 se convierte en un trinomio cuadrado perfecto. Por otra parte, si en una ecuación (en una igualdad) sumamos un número, también hay que restarlo para que la ecuación (igualdad) no se altere. Este proceso lo llevamos a cabo en la siguiente tabla:

$\mathbf{x}^2 + 20\mathbf{x} - 8000 = 0$	Ecuación original
$\mathbf{x}^2 + 20\mathbf{x} + 100 - 100 - 8000 = 0$	Se suma y se resta 100 para no alterar la igualdad
$(\mathbf{x} + 10)^2 - 8100 = 0$	Expresamos el trinomio en un binomio
$(\mathbf{x} + 10)^2 = 8100$	Pasamos 8100 al lado derecho
$\mathbf{x} + 10 = \pm\sqrt{8100}$	Extraemos raíz cuadrada
$\mathbf{x} + 10 = \pm 90$	Calculamos la raíz cuadrada
$\mathbf{x} = -10 \pm 90$	Despejamos la incógnita **x**
$\mathbf{x}_1 = -100$ y $\mathbf{x}_2 = 80$	Operaciones y solución de la ecuación

Comprobación. En la primera columna de la tabla de abajo se comprueba $\mathbf{x}_1 = -100$ y
en la segunda columna $\mathbf{x}_2 = 80$.

$\mathbf{x}^2 + 20\mathbf{x} - 8000 = 0$	$\mathbf{x}^2 + 20\mathbf{x} - 8000 = 0$
Con $\mathbf{x}_1 = -100$	Con $\mathbf{x}_2 = 80$
$(-100)^2 + 20(-100) - 8000 = 0$	$80^2 + 20\times 80 - 8000 = 0$
$10000 - 2000 - 8000 = 0$	$6400 + 1600 - 8000 = 0$
$8000 - 8000 = 0$	$8000 - 8000 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

Para contestar las preguntas del ejemplo vemos que $\mathbf{x}_1 = -100$ no es una respuesta porque el número de casas habitadas no puede ser negativo. Entonces $\mathbf{x}_2 = 80$ es el número de casas que están habitadas en dicha calle y la aportación total entre el número de casas habitadas $\frac{20000}{80} = 250$ es la cantidad de dinero que aportó cada casa.

Ejemplo 2. Resolución de la ecuación $\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} - 65 = 0$.

Solución. La estrategia general de este método consiste en despejar la incógnita **x**, para lo cual hay que eliminar el exponente 2 en esta ecuación y la estrategia particular para lograrlo sin alterar la ecuación está en completar el binomio $\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x}$ a un trinomio cuadrado perfecto. Ya sabes que sumando 16 al binomio se obtiene un trinomio cuadrado perfecto, pero esta operación se va a efectuar en una ecuación que contiene un signo de igualdad, por lo que es necesario sumar y restar 16 para que dicha igualdad no se altere. Este es primer paso del algoritmo para despejar la incógnita **x**:

$$\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} + 16 - 16 - 65 = 0$$

El segundo paso es para expresar el trinomio cuadrado perfecto en un binomio elevado al cuadrado y hacer la operación de suma o resta con los dos números sobrantes.

$$(\mathbf{x} - 4)^2 - 81 = 0$$

Observa que con el trinomio cuadrado perfecto hemos logrado quitar el exponente 2 a la incógnita **x**, pero no lo hemos eliminado. En el tercer paso empezamos a despejar la incógnita **x** pasando el término constante al otro lado de la igualdad como se muestra a continuación:

$$(\mathbf{x} - 4)^2 = 81$$

Del lado izquierdo de esta igualdad ha quedado una potencia con exponente 2; es el momento preciso para eliminar el exponente. En el cuarto paso extraemos la raíz cuadrada en ambos lados de la igualdad (recuerda que el exponente 2 y la raíz cuadrada se anulan cuando se operan uno seguido del otro). La ecuación con los signos ± que da una raíz cuadrada es:

$$\mathbf{x} - 4 = \pm\sqrt{81}$$

El quinto paso es para despejar **x** y calcular la raíz cuadrada: $\mathbf{x} = 4 \pm 9$

En el sexto paso realizamos las operaciones finales (primero restando y luego sumando) para obtener la solución de la ecuación:

$$\mathbf{x}_1 = 4 - 9 = -5 \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = 4 + 9 = 13$$

Comprobación.

$\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} - 65 = 0$	$\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} - 65 = 0$
Con $\mathbf{x}_1 = -5$	Con $\mathbf{x}_2 = 13$
$(-5)^2 - 8(-5) - 65 = 0$	$13^2 - 8\times 13 - 65 = 0$
$25 + 40 - 65 = 0$	$169 - 104 - 65 = 0$
$65 - 65 = 0$	$169 - 169 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

Con el fin de iniciar una comparación entre ambos métodos, resuelve en el ejemplo 3 la misma ecuación con el método por factores desarrollado en la acción 2.

Ejemplo 3. Resolución de la ecuación $\mathbf{x}^2 - 8\mathbf{x} - 65 = 0$.

Solución.

¿Cuál método sientes que te ofrece más ventajas en la resolución de una ecuación cuadrática? Señala tu respuesta con una paloma √ en una de las siguientes opciones:

El de la acción 2 ☐ El de esta acción 4 ☐ Los dos por igual ☐

Explica brevemente el porqué de tu respuesta______________________________

____

Ejemplo 4. Resolución de la ecuación $\mathbf{x}^2 - 14\mathbf{x} - 735 = 0$.

Solución. Los seis pasos para resolver la ecuación, desarrollados y explicados en el ejemplo 2 los sintetizamos ahora en la siguiente tabla. Explícatelos a ti mismo cada uno:

Paso	$\mathbf{x}^2 - 14\mathbf{x} - 735 = 0$	Ecuación original
1	$\mathbf{x}^2 - 14\mathbf{x} + 49 - 49 - 735 = 0$	Completamos el trinomio
2	$(\mathbf{x} - 7)^2 - 784 = 0$	Expresamos el trinomio en un binomio
3	$(\mathbf{x} - 7)^2 = 784$	Despejamos el binomio al cuadrado
4	$\mathbf{x} - 7 = \pm\sqrt{784}$	Extraemos raíz cuadrada
5	$\mathbf{x} = 7 \pm 28$	Despejamos **x** y calculamos la raíz
6	$\mathbf{x}_1 = -21$ y $\mathbf{x}_2 = 35$	Operaciones finales y la solución

Comprobación. Completa la siguiente tabla para llevar a cabo la comprobación.

$\mathbf{x}^2 - 14\mathbf{x} - 735 = 0$	$\mathbf{x}^2 - 14\mathbf{x} - 735 = 0$
Con $\mathbf{x}_1 = -21$	Con $\mathbf{x}_2 = 35$

Ya debiste haber resuelto la ecuación $\mathbf{x}^2 - 14\mathbf{x} - 735 = 0$ en el ejercicio 8 de la acción 1.2, de no ser así resuélvela usando el método que allí se trabajó y compáralos para ver si has modificado tu percepción. Señala la respuesta y sé más explícito en la explicación.

¿Cuál método sientes que te ofrece más ventajas?

El método de la acción 2 ☐ El método de la acción 4 ☐ Los dos por igual ☐

Explica tu respuesta. ____

____

____

Ejemplo 5. Resolución de la ecuación $\mathbf{x}^2 - 158\mathbf{x} + 6225 = 0$.

Solución. Con el método del trinomio resuelve la ecuación en la siguiente tabla.

Paso	$\mathbf{x}^2 - 158\mathbf{x} + 6225 = 0$	Ecuación original
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Comprobación. Completa la siguiente tabla para llevar a cabo la comprobación.

$\mathbf{x}^2 - 158\mathbf{x} + 6225 = 0$	$\mathbf{x}^2 - 158\mathbf{x} + 6225 = 0$
Con $\mathbf{x}_1 =$	Con $\mathbf{x}_2 =$

En el ejemplo 9 de la acción 1 de esta unidad, resolviste esta ecuación con el método por factores. Si no es así resuélvela aquí y compara los métodos.

Ejemplo 6. Resolución de la ecuación $\mathbf{x}^2 + 6.8\mathbf{x} - 19.18 = 0$.

Solución. Antes de resolver esta ecuación por el método del trinomio intenta resolverla (en el siguiente espacio en blanco) usando el método por factores. Después con el método del trinomio resuelve la ecuación en la siguiente tabla.

Paso	$\mathbf{x}^2 + 6.8\mathbf{x} - 19.18 = 0$	Ecuación original
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Comprobación. Completa la siguiente tabla para llevar a cabo la comprobación.

$\mathbf{x}^2 + 6.8\mathbf{x} - 19.18 = 0$	$\mathbf{x}^2 + 6.8\mathbf{x} - 19.18 = 0$
Con $\mathbf{x}_1 =$	Con $\mathbf{x}_2 =$

¿Cuál método sientes que te ofrece más ventajas? Explica ampliamente tu respuesta.

____
____
____

Ejemplo 7. Resuelve con el método del trinomio la ecuación.

$\mathbf{x}^2 + 7.89\mathbf{x} + 14.993 = 0.$

Solución. Usa la tabla que sigue para resolver la ecuación.

Paso	$\mathbf{x}^2 + 7.89\mathbf{x} + 14.993 = 0$	Ecuación original
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Comprobación. Completa la siguiente tabla para llevar a cabo la comprobación.

$\mathbf{x}^2 + 7.89\mathbf{x} + 14.993 = 0$	$\mathbf{x}^2 + 7.89\mathbf{x} + 14.993 = 0$
Con $\mathbf{x}_1 =$	Con $\mathbf{x}_2 =$

Con el método por factores esta ecuación toma la forma:

$$x^2 + 7.89x + 14.993 = (x + \quad)(x + \quad) = 0$$

Encontrar dos números cuya suma sea 7.89 y el producto resulte ser 14.993 es un proceso muy engorroso, sin embargo, con el método del trinomio fácilmente encuentras que $x_1 = -4.7$ y $x_2 = -3.19$ es la solución y con esto ya sabes que 4.7 y 3.19 son esos números que buscas, porque $4.7 + 3.19 = 7.89$ y $4.7\times3.19 = 14.993$.

Ejemplo 8. Resuelve con el método del trinomio la ecuación $x^2 + 6x - 1 = 0$

Solución. Usa la tabla de abajo para resolver la ecuación.

Paso	$x^2 + 6x - 1 = 0$	Ecuación original
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Con el método por factores esta ecuación toma la forma: $x^2 + 6x - 1 = (x + \quad)(x - \quad) = 0$. Encontrar dos números cuya resta sea 6 y que multiplicados den 1, más que engorroso resulta imposible. Con el método del trinomio en la tabla anterior debiste haber llegado a la solución $x_1 = -3 - \sqrt{10}$ y $x_2 = -3 + \sqrt{10}$ y es imposible decir cuánto valen estos números debido a que 10 no tiene raíz exacta, resulta que $\sqrt{10}$ tiene una expansión decimal infinita y lo único que podemos hacer es dar una aproximación de su valor, por ejemplo, si redondeamos a dos cifras decimales tenemos $\sqrt{10} = 3.16$. Así una solución aproximada es $x_1 = -6.16$ y $x_2 = 0.16$ y su comprobación da una aproximación a cero como se muestra abajo con $x_1 = -6.16$

Comprobación. Completa la siguiente tabla para llevar a cabo la comprobación con x_2.

$x^2 + 6x - 1 = 0$	$x^2 + 6x - 1 = 0$
Con $x_1 = -6.16$	Con $x_2 = 0.16$
$(-6.16)^2 + 6(-6.16) - 1 = 0$	
$37.9546 - 36.96 - 1 = 0$	
$0.9946 - 1 = 0$	
$-0.0054 = 0$	

Con esto te debe quedar sumamente claro el gran potencial práctico del método del trinomio y en acción que sigue vamos a ver su potencial teórico.

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones con el método del trinomio (redondea a dos cifras decimales las soluciones con expansión decimal infinita).

1. $\mathbf{x}^2 - 21\mathbf{x} + 98 = 0$. *2.* $\mathbf{x}^2 - 15\mathbf{x} - 34 = 0$. *3.* $\mathbf{x}^2 + 66\mathbf{x} + 945 = 0$.

4. $\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} - 11.25 = 0$. *5.* $\mathbf{x}^2 + 2.7\mathbf{x} - 127 = 0$ *6.* $\mathbf{x}^2 + 882\ 14\mathbf{x} - 11635 = 0$.

7. $\mathbf{x}^2 - 4\mathbf{x} + 2 = 0$. *8.* $\mathbf{x}^2 + 15\mathbf{x} + 48 = 0$. *9.* $\mathbf{x}^2 - 24\mathbf{x} + 34 = 0$.

10. $\mathbf{x}\left(\mathbf{x} + \frac{1}{\mathbf{x}}\right) = 4\mathbf{x} - 3$ *11.* $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}-2} + 1 = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x}+5}$ *12.* $x^2 + 7x = (x - 2)(2x - 7)$

SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA CON $a \neq 1$, POR EL MÉTODO DEL TRINOMIO

Ejemplo 9. Resuelve la ecuación $5\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} - 3 = 0$ con el método del trinomio.

Solución. Como ahora en la ecuación tenemos que a = 5, el algoritmo se incrementa en un paso porque hay que multiplicar por 5 toda la ecuación. Los siete pasos del método del trinomio los sintetizamos en la siguiente tabla. Explícatelos a ti mismo cada uno:

Paso	$5\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} - 3 = 0$	Ecuación original
1	$(5\mathbf{x})^2 + 2(5\mathbf{x}) - 15 = 0$	Multiplicamos por 5
2	$(5\mathbf{x})^2 + 2(5\mathbf{x}) + 1 - 1 - 15 = 0$	Completamos el trinomio
3	$(5\mathbf{x} + 1)^2 - 16 = 0$	Expresamos el trinomio en un binomio al cuadrado
4	$(5\mathbf{x} + 1)^2 = 16$	Despejamos el binomio al cuadrado
5	$5\mathbf{x} + 1 = \pm\sqrt{16}$	Extraemos raíz cuadrada
6	$\mathbf{x} = \frac{-1 \pm 4}{5}$	Despejamos **x** y calculamos la raíz
7	$\mathbf{x}_1 = -1$ y $\mathbf{x}_2 = \frac{3}{5}$	Operaciones finales y la solución

Comprobación. Observa la siguiente tabla donde se ha hecho la comprobación.

$5\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} - 3 = 0$	$5\mathbf{x}^2 + 2\mathbf{x} - 3 = 0$
Con $\mathbf{x}_1 = -1$	Con $\mathbf{x}_2 = \frac{3}{5} = 0.6$
$5(-1)^2 + 2(-1) - 3 = 0$	$5(0.6)^2 + 2(0.6) - 3 = 0$
$5 - 2 - 3 = 0$	$1.8 + 1.2 - 3 = 0$
$5 - 5 = 0$	$3 - 3 = 0$
$0 = 0$	$0 = 0$

Ejemplo 10. Resuelve la ecuación $3\mathbf{x}^2 - 6\mathbf{x} + 2 = 0$ con el método del trinomio.

Solución.

Paso	$3\mathbf{x}^2 - 6\mathbf{x} + 2 = 0$	Ecuación original
1	$(3\mathbf{x})^2 - 6(3\mathbf{x}) + 6 = 0$	Multiplicamos por 3
2	$(3\mathbf{x})^2 - 6(3\mathbf{x}) + 9 - 9 + 6 = 0$	Completamos el trinomio
3	$(3\mathbf{x} - 3)^2 - 3 = 0$	Expresamos el trinomio en un binomio al cuadrado
4	$(3\mathbf{x} - 3)^2 = 3$	Despejamos el binomio al cuadrado
5	$3\mathbf{x} - 3 = \pm\sqrt{3}$	Extraemos raíz cuadrada
6	$\mathbf{x} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$	Despejamos **x**
7	$\mathbf{x}_1 = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$ y $\mathbf{x}_2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}$	La solución
7	$\mathbf{x}_1 = 0.423$ y $\mathbf{x}_2 = 1.576$	Solución aproximada redondeando $\sqrt{3} = 1.73$

Comprobación. Completa la siguiente tabla para hacer una comprobación.

$3\mathbf{x}^2 - 6\mathbf{x} + 2 = 0$	$3\mathbf{x}^2 - 6\mathbf{x} + 2 = 0$
Con $\mathbf{x}_1 = 0.423$	Con $\mathbf{x}_2 = 1.576$

Ejemplo 11. Resuelve la ecuación $14\mathbf{x}^2 - 12\mathbf{x} - 32 = 0$ con el método del trinomio.

Solución. Completa la siguiente tabla con la resolución de la ecuación.

Paso	$14\mathbf{x}^2 - 12\mathbf{x} - 32 = 0$	Ecuación original
1	$(14\mathbf{x})^2 - 12(14\mathbf{x}) - 448 = 0$	Multiplicamos por 14
2		Completamos el trinomio
3		Expresamos el trinomio en un binomio al cuadrado
4		Despejamos el binomio al cuadrado
5		Extraemos raíz cuadrada
6		Despejamos **x** y calculamos la raíz
7		Operaciones finales y la solución

Comprobación. Completa la siguiente tabla para llevar a cabo la comprobación.

$14\mathbf{x}^2 - 12\mathbf{x} - 32 = 0$	$14\mathbf{x}^2 - 12\mathbf{x} - 32 = 0$
Con $\mathbf{x}_1 =$	Con $\mathbf{x}_2 =$

Ejemplo 12. Resuelve la ecuación $4\mathbf{x}^2 + 17\mathbf{x} + 17.5 = 0$ con el método del trinomio.

Solución. Completa la siguiente tabla con la resolución de la ecuación.

Paso	$4\mathbf{x}^2 + 17\mathbf{x} + 17.5 = 0$	Ecuación original
1	$(4\mathbf{x})^2 + 17(4\mathbf{x}) + 70 = 0$	Multiplicamos por 4
2		Completamos el trinomio
3		Expresamos el trinomio en un binomio al cuadrado
4		Despejamos el binomio al cuadrado
5		Extraemos raíz cuadrada

6		Despejamos **x** y calculamos la raíz
7		Operaciones finales y la solución

Comprobación. Completa la siguiente tabla para efectuar la comprobación.

$4\mathbf{x}^2 + 17\mathbf{x} + 17.5 = 0$	$4\mathbf{x}^2 + 17\mathbf{x} + 17.5 = 0$
Con $\mathbf{x}_1 =$	Con $\mathbf{x}_2 =$

EJERCICIOS

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas con el método del trinomio.

13. $6\mathbf{x}^2 - \mathbf{x} - 1 = 0$ *14.* $2\mathbf{x}^2 - 5\mathbf{x} + 2 = 0$ *15.* $8\mathbf{x}^2 + 14\mathbf{x} - 15 = 0$

16. $0.08\mathbf{x}^2 + 0.34\mathbf{x} + 0.15 = 0$ *17.* $0.1\mathbf{x}^2 - 0.198\mathbf{x} - .04 = 0$

18. $0.6\mathbf{x}^2 = -2.94\mathbf{x} + 0.3$ *19.* $5 + \frac{2}{\mathbf{x} - 3} = \frac{7}{\mathbf{x}}$

20. $3 + \frac{2}{\mathbf{x}} - \frac{1}{\mathbf{x}^2} = 0$ *21.* $x^2 - 7x = (x + 2)(2x - 7)$

FIN DE LA ACCIÓN

ACCIÓN 5

LA FÓRMULA GENERAL PARA LA ECUACIÓN CUADRÁTICA CON UNA INCÓGNITA

Objetivo: el alumno debe aprender a deducir la fórmula general para la solución de la ecuación de segundo grado en una incógnita, además debe conocer y aplicar los resultados teóricos que se desprenden de dicha fórmula.

> **AL ESTUDIANTE:** en esta acción ya estás trabajando en un nivel enteramente algebraico, al cual has llegado poco a poco, partiendo de ejemplos tomados de situaciones reales. Como ya dominas los significados matemáticos de la ecuación cuadrática, es hora de que aprendas a desarrollarlos teóricamente.

ECUACIONES CUADRÁTICAS QUE NO TIENEN SOLUCIÓN

La ecuación $\mathbf{x}^2 + 1 = 0$ no tiene solución. Veamos porqué: si despejamos $\mathbf{x}^2$ de la ecuación tenemos $\mathbf{x}^2 = -1$, pero $\mathbf{x}^2$ nunca toma valores negativos porque si $\mathbf{x}$ fuera negativa, por ejemplo cuando $\mathbf{x} = -1$ al elevar al cuadrado cada lado de la igualdad, el signo negativo se convierte en positivo ya que según la ley de los signos "menos por menos da más", es decir que $\mathbf{x}^2 = (-1)^2 = (-1)(-1) = 1$.

Lo mismo ocurre con expresiones como $\mathbf{x}^2 + 4 = 0$, $\mathbf{x}^2 + 7.5 = 0$ o $\mathbf{x}^2 + 25 = 0$.

Generalizando lo anterior, la ecuación $\mathbf{x}^2 + c = 0$ no tiene solución si $c > 0$ y sí tiene solución si $c < 0$, por ejemplo la solución de $\mathbf{x}^2 - 1 = 0$ es $\mathbf{x}_1 = -1$ y $\mathbf{x}_2 = 1$. Generalizando todavía más, la ecuación

$$a\mathbf{x}^2 + c = 0$$

sí tiene solución, siempre y cuando a y c tengan signos diferentes así, por ejemplo, en $-3\mathbf{x}^2 + 6 = 0$, la solución es $\mathbf{x}_1 = -\sqrt{2}$ y $\mathbf{x}_2 = \sqrt{2}$, como se vio al final de la acción 2.

Pero no tiene solución cuando los signos de a y c son iguales, sean positivos o negativos, por ejemplo, $-3\mathbf{x}^2 - 6 = 0$, en cuyo caso la solución sería $\mathbf{x}_1 = -\sqrt{-2}$ y $\mathbf{x}_2 = \sqrt{-2}$, pero $\sqrt{-2}$ no es un número real (la raíz de un número negativo no existe en los números reales).

Hay ecuaciones completas que no tienen solución, como $\mathbf{x}^2 + 5\mathbf{x} + 8 = 0$, como vamos a ver al final de esta acción.

En cambio, la ecuación incompleta $a\mathbf{x}^2 + b\mathbf{x} = 0$ con $a \neq 0$ siempre tiene solución, como vimos en la acción 2 (inciso A del Método de factorización para ecuaciones incompletas).

¿Cómo podemos saber si una ecuación cuadrática tiene solución o no la tiene antes de proceder a resolverla? Con la ***FÓRMULA GENERAL*** *para resolver ecuaciones cuadráticas en una incógnita podremos saber* ***si no tiene solución o si su solución es única o si está compuesta por dos valores****.*

DEDUCCIÓN DE LA FÓRMULA GENERAL PARA RESOLVER LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

Si en vez de aplicar el método del trinomio en cada ecuación concreta que se nos presenta lo hacemos en la ecuación general $a\mathbf{x}^2 + b\mathbf{x} + c = 0$ con $a \neq 0$ obtendremos una fórmula con la cual resolveremos todas las ecuaciones cuadráticas y contestaremos las preguntas anteriores.

En la siguiente tabla vamos a resolver la ecuación general; analiza los significados en cada paso para que tú puedas explicarles a tus compañeros esta demostración.

Paso	$a\mathbf{x}^2 + b\mathbf{x} + c = 0$	Ecuación original.
1	$(a\mathbf{x})^2 + b(a\mathbf{x}) + ac = 0$	Multiplicamos por a.
2	$(a\mathbf{x})^2 + b(a\mathbf{x}) + \frac{\mathbf{b}^2}{4} - \frac{\mathbf{b}^2}{4} - ac = 0$	Aquí a**x** es el primero y b es el doble del segundo, entonces $\frac{\mathbf{b}}{2}$ es el segundo y $\frac{\mathbf{b}^2}{4}$ completa el trinomio.
3	$(a\mathbf{x} + \frac{\mathbf{b}}{2})^2 - \frac{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}{4} = 0$	Expresamos el trinomio en un binomio elevado al cuadrado y operamos los términos restantes.
4	$(a\mathbf{x} + \frac{\mathbf{b}}{2})^2 = \frac{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}{4}$	Despejamos el binomio al cuadrado.
5	$a\mathbf{x} + \frac{\mathbf{b}}{2} = \pm\sqrt{\frac{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}{4}}$	Extraemos raíz cuadrada.
6	$a\mathbf{x} = -\frac{\mathbf{b}}{2} \pm \frac{\sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2}$ $\mathbf{x} = \frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$	Despejamos a**x** y calculamos la raíz de 4 en el denominador, después hacemos operaciones en lado derecho de la igualdad y despejamos **x**.
7	$\mathbf{x}_1 = \frac{-\mathbf{b} - \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$ $\mathbf{x}_2 = \frac{-\mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$	La solución de la ecuación general.

La expresión $\boxed{\mathbf{x} = \frac{-\mathbf{b} \pm \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}}$ en el paso 6 es la ***fórmula general*** para resolver la

Ecuación general o estándar $a\mathbf{x}^2 + b\mathbf{x} + c = 0$ con $a \neq 0$.

Las expresiones $\mathbf{x}_1 = \dfrac{-\mathbf{b} - \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$ y $\mathbf{x}_2 = \dfrac{-\mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}}}{2\mathbf{a}}$ del paso 7 separan los signos ± de la raíz cuadrada para calcular la solución de la ecuación cuadrática en los casos específicos.

> **AL ESTUDIANTE:** es muy importante que puedas explicar cada uno de los pasos realizados en esta demostración, con eso estarás potenciado tu aprendizaje y con ello tus capacidades intelectuales.

Observación. Un número que es solución de una ecuación también se le llama ***raíz*** de la ecuación, por ejemplo, sabemos que $\mathbf{x}_1 = -2$ y $\mathbf{x}_2 = 2$ son la solución de la ecuación $\mathbf{x}^2 - 4 = 0$, en cuyo caso también se dice que -2 y 2 son las *raíces* de dicha ecuación, en otras palabras *las raíces de una ecuación conforman su solución* (no confundir este término con la raíz cuadrada)

Ejemplo 1. Resolución de la ecuación $3\mathbf{x}^2 + 15\mathbf{x} - 42 = 0$ usando la fórmula general.

Solución. En esta ecuación tenemos a = 3, b = 15 y c = -42, al sustituir estos valores en la fórmula general tenemos: $\mathbf{x} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4\times 3\times(-42)}}{2\times 3} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{225+504}}{6} =$ $= \dfrac{-15 \pm \sqrt{729}}{6} = \dfrac{-15 \pm 27}{6}$. Separando los signos que generó la raíz cuadrada tenemos la solución $\mathbf{x}_1 = \dfrac{-15-27}{6} = -\dfrac{42}{6} = -7$ y $\mathbf{x}_2 = \dfrac{-15+27}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$. En forma equivalente decimos que las raíces de la ecuación $3\mathbf{x}^2 + 15\mathbf{x} - 42 = 0$ son -7 y 2.

Ejemplo 2. Resolución de la ecuación $\mathbf{x}^2 - 7\mathbf{x} + 9 = 0$ con la fórmula general.

Solución. En la fórmula general sustituimos los valores a = 1, b = -7 y c = 9, y obtenemos: $\mathbf{x} = \dfrac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4\times 1\times 9}}{2\times 1} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49-36}}{2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{13}}{2}$. Al separar los signos que generó la raíz cuadrada tenemos la solución $\mathbf{x}_1 = \dfrac{7-\sqrt{13}}{2}$ y $\mathbf{x}_2 = \dfrac{7+\sqrt{13}}{2}$. Con $\sqrt{13} = 3.61$ redondeando a dos decimales tenemos que las raíces o la solución aproximada de $\mathbf{x}^2 - 7\mathbf{x} + 9 = 0$ son $\mathbf{x}_1 = 1.695$ y $\mathbf{x}_2 = 5.305$.

Ejemplo 3. Calcular las raíces de la ecuación $7\mathbf{x}^2 + 54\mathbf{x} - 16 = 0$ con la fórmula general.

Solución. En esta ecuación a = 7, b = 54 y c = -16 y con la fórmula general se tiene: $\mathbf{x} = \frac{-54 \pm \sqrt{54^2 + 4\times 7\times 16}}{2\times 7} = \frac{-54 \pm \sqrt{2916 + 448}}{14} = \frac{-54 \pm \sqrt{3364}}{14}$. Al calcular la raíz cuadrada y operar por separado los signos ± obtenemos la solución o las raíces de la ecuación: $\mathbf{x}_1 = \frac{-54-58}{14} = -\frac{112}{14} = -8$ y $\mathbf{x}_2 = \frac{-54+58}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$.

Ejemplo 4. Calcular las raíces de la ecuación $2\mathbf{x}^2 - 11\mathbf{x} = 0$ con la fórmula general.

Solución. En la fórmula general sustituimos los valores a = 2, b = -11 y c = 0, y obtenemos: $\mathbf{x} = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 0}}{2\times 2} = \frac{-11 \pm 11}{4}$. Al operar por separado los signos ± obtenemos las raíces de la ecuación: $\mathbf{x}_1 = -\frac{22}{4} = \frac{11}{2} = 5.5$ y $\mathbf{x}_2 = \frac{0}{4} = 0$.

Ejemplo 5. Resolución de la ecuación $\mathbf{x}^2 - 9 = 0$ con la fórmula general.

Solución. En esta ecuación tenemos a = 1, b = 0 y c = -9, la fórmula general nos da: $\mathbf{x} = \frac{0 \pm \sqrt{0^2 + 4\times 1\times 9}}{2\times 1} = \frac{\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{\pm 6}{2}$. Separando los signos tenemos la solución o las raíces: $\mathbf{x}_1 = -3$ y $\mathbf{x}_2 = 3$.

¿CÓMO SABER CUÁNDO UNA ECUACIÓN CUADRÁTICA NO TIENE SOLUCIÓN, TIENE SOLUCIÓN ÚNICA O TIENE DOBLE SOLUCIÓN?

El Discriminante.

En esta acción ya hemos resuelto ecuaciones cuadráticas escritas de la forma $ax^2+bx+c=0$ con la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, tiene dos soluciones, pero **tiene a lo más dos soluciones reales**. Ahora veremos las diferentes formas en que se presentaran estas soluciones o raíces de la ecuación.

Comencemos resolviendo las siguientes raíces cuadradas

$$\sqrt{9} =$$
$$\sqrt{0} =$$
$$\sqrt{-4} =$$

Es claro que la raíz cuadrada de nueve es tres puesto que: (3) (3) = 9 y (-3)(-3)=9, en donde 3 y -3 son números reales. De igual forma la raíz cuadrada de cero es cero pues (0) (0)=0, también un número real, pero en el caso de la raíz cuadrada de **menos cuatro** $\boldsymbol{\sqrt{-4}}$, no existe un número real que multiplicado por el mismo, de menos cuatro, Pues el producto de dos números positivos es positivo al igual que el producto de dos números negativos.

(2) (2) = 4
(-2) (-2) = 4

En la raíz cuadrada $\sqrt{b^2 - 4ac}$ la solución será positiva, cero o raíz de un numero negativo, dependiendo de los valores de a, b, c.
Al termino $b^2 - 4ac$, que se encuentra dentro de esta raíz cuadrada se le conoce como ***Discriminante*** que se denota por la letra D, y sirve para "discriminar" o decidir entre los tipos posibles de resultado que se obtendrá al calcular la raíz, pues:
Si $D = b^2 - 4ac$, da como resultado un número positivo, entonces se podrá obtener un valor real en la raíz $\sqrt{b^2 - 4ac}$ y este será positivo.
Si $D = b^2 - 4ac$, da como resultado cero entonces el valor que se obtiene en la raíz $\sqrt{b^2 - 4ac}$ será cero.
Si $D = b^2 - 4ac$, da como resultado un número negativo, entonces no se podrá obtener un valor real en la raíz $\sqrt{b^2 - 4ac}$
De esta forma deducimos el tipo de soluciones o raíces que tendrá la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$

- Si $D = b^2 - 4ac > 0$ (es positivo) se tendrán dos soluciones o raíces reales diferentes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

- Si $D = b^2 - 4ac = 0$ se tendrá una solución o raíz real:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \rightarrow x = \frac{-b \pm 0}{2a} \rightarrow x_1 = \frac{-b+0}{2a} \rightarrow x_2 = \frac{-b-0}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-b}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Es decir, $x = x_1 = x_2$

Este caso se suele interpretar de dos formas, ya que se dice que se tiene una solución real de multiplicidad dos o bien que se tienen dos soluciones reales iguales.

Por último, si $D = \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} < 0$ (es negativo) no se tendrán soluciones o raíces reales, por lo cual se necesitará de los números imaginarios para dar solución a este caso.

Ejemplo 6:
Por medio del discriminante, indica que tipo de solución tienen las siguientes ecuaciones cuadráticas y encuentra estas soluciones.

1. $x^2 = x+6$
2. $2x^2-32x+128 = 0$
3. $5x^2+x+1 = 0$

Solución a la ecuación uno.

Para poder calcular el discriminante de la ecuación, esta debe de estar escrita en la forma $ax^2+bx+c=0$, por lo que hay que mover todos los términos a un lado de la igualdad:

$$x^2=x+6$$
$$x^2-x-6=0$$

Donde podemos decir que a=1, b=-1, c= -6
Procedemos a calcular el discriminante:

$D= \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$
$D= (-1)^2-4(1)(-6)$
$D= 1-4(-6)$
$D=25$

Como el discriminante "D" es 25 (un valor mayor a cero) la ecuación tiene dos soluciones o raíces reales diferentes, que al aplicar un método de solución se obtiene: $x_1=3$ y $x_2=-2$

Solución a la ecuación dos.

Observamos que la ecuación $2x^2-32x+128=0$ ya está escrita de la forma $ax^2+bx+c=0$, por lo que podemos identificar los siguientes valores:
a=2, b=-32 c= 128
Resolviendo para obtener el discriminante se tiene que:

$D= \mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$
$D= (-32)^2-4(2)(128)$
$D= 1024-4(256)$
$D = 0$

El discriminante “D” es cero, por lo cual se tiene una solución real de multiplicidad dos o bien dos soluciones iguales:

$$\mathrm{x} = \frac{-(-32) \pm \sqrt{0}}{2(2)}$$

$$\mathrm{x} = \frac{-(-32) \pm 0}{2(2)}$$

$$\mathrm{x} = \frac{-(-32)}{2(2)}$$

$$\mathrm{x} = \frac{32}{4}$$

Por lo tanto, la raíz o la solución de la ecuación cuadrática es: x= 8

Solución a la ecuación tres.

Procedemos de la misma forma, observando que la ecuación $5x^2+x+1=0$ esta acomodada de la forma $ax^2+bx+c=0$, por lo que podemos identificar los siguientes valores:

a=5, b=1 c= 1, los cuales ocupamos para obtener el discriminante de la ecuación:

D= $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}$
D= $(1)^2$-4(5) (1)
D= 1-4(5)
D = -19

El discriminante “D”, es negativo por lo cual la ecuación no tiene soluciones reales.

NOTA:

Cuando se habla de numeros imaginarios estos se escriben de la forma bi, siendo b un numero real y donde “i” , tiene el valor de:

$$i = \sqrt{-1}$$

Por lo que un radical que no exista en los números reales se puede expresar como un número imaginario como se muestra en el siguiente ejemplo:

$$\sqrt{-3} = \sqrt{(3)(-1)} = \sqrt{3}\ \sqrt{-1} = \sqrt{3}\, i$$

De esta forma $\sqrt{-3}$ se expresa como el número imaginario $\sqrt{3}\, i$

Retomando la solución del problema tres, el discriminante tiene el valor de -19, debido a esto no se tienen soluciones reales, pero las soluciones imaginarias se encuentran procediendo de la siguiente forma:

$$\mathrm{x} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$$

$$\mathrm{x} = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(5)(1)}}{2(5)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-19}}{10}$$

Donde se tiene que:

$$\sqrt{-19} = \sqrt{(19)(-1)} = \sqrt{19}\,\sqrt{-1} = \sqrt{19}\, i$$

Sustituyendo:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{19}i}{10}$$

Por lo que las soluciones imaginarias serán:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{19}i}{10} \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{19}i}{10}$$

Resumiendo:

- La ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ siempre tendrá dos soluciones
- La ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$ siempre tendrá a lo más dos Soluciones reales
- A la expresión D= $b^2 - 4ac$ se le conoce como discriminante.

Si:

- D= $b^2 - 4ac$ > o, la ecuación tiene dos soluciones reales
- D= $b^2 - 4ac$ = o, la ecuación tiene una solución real de multiplicidad dos o dos soluciones iguales
- D= $b^2 - 4ac$ < o no tiene soluciones reales

EJERCICIOS

Determina por medio del discriminante el número de raíces que tiene, en los números reales, cada ecuación y en caso de que proceda calcúlalas usando la fórmula general.

1. $3x^2 - 2x + 8 = 0$ *2.* $x^2 + 18x + 81 = 0$ *3.* $5x^2 - 10x = 0$

4. $10x^2 - 5x + 6$ *5.* $6x^2 - 7x - 3 = 0$ *6.* $2x^2 + 32 = 0$

7. $x^2 - 8x = (x + 2)(2x - 12)$ *8.* $x - 5 = \frac{x+10}{x-2}$ *9.* $(3x + 2)^2 = (4x - 1)^2$

FIN DE LA ACCIÓN

Ejercicio*s*

Encuentra el modelo estándar más simple que le dé solución a cada problema y encuentra la solución.

1. El producto de do números consecutivos pares es 960¿cuál es el número mayor?
2. El largo de un rectángulo mide 10 m más que el ancho. Si su área es de 1200 m^2 ¿Cuáles son sus dimensiones?
3. Si las soluciones de una ecuación cuadrática son -8 y $\frac{2}{3}$ cual podría ser una ecuación cuadrática relacionada a estas soluciones.
4. Indica la ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0$ cuyas soluciones sean suman 8 y el producto es 15.
5. Indica la ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0$ cuyas soluciones sean suman $\frac{1}{2}$ y el producto es $-\frac{21}{2}$.

Resuelve las siguientes ecuaciones usando el método por factores.

1. $x^2-11x-26=0$ 2. $x^2+3x-4=0$ 3. $x^2-10x+25=0$
4. $x^2+4x+3=0$ 5. $x^2-1x-6=0$

Resuelve las siguientes ecuaciones usando el método por factores.

1. $16x^2+24x-9=0$ 2. $8x^2+2x-1=0$ 3. $3x^2-5x-6=0$
4. $4x^2-12x+7=0$ 5. $9x^2+24x+16=0$

Resuelve las siguientes ecuaciones usando el método por factores.

1. $21x^2-7x=0$
2. $0.2x^2-0.5x=0$
3. $2x=(x)(3x-2)$
4. $\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}x=0$
5. $\frac{x}{x-5}=\frac{x}{x-3}$

Resuelve las siguientes ecuaciones usando el método por diferencia de cuadrados.

1. $121x^2-7^2=0$
2. $7x^2-1=0$
3. $17x^2-20=0$
4. $81x^2-26=0$
5. $\frac{7}{8}x^2-32=0$

Resuelve las siguientes ecuaciones usando el método por factores despejando x.

1. $\frac{128}{x^2} = 2$
2. $\frac{x+3}{2} = \frac{8}{x-3}$
3. $\frac{4x+8}{x} - 4 = 2x$
4. $\frac{4}{x-1} = \frac{x+1}{6}$
5. $\frac{35+3x}{x+1} = \frac{x-55}{3x-53}$

Completa los siguientes binomios a un trinomio cuadrado perfecto.

1. x^2-16x=
2. x^2-24x=
3. x^2-14x=
4. x^2-7x=
5. x^2-x=

Completa los siguientes binomios a un trinomio cuadrado perfecto.

1. $6x^2$-19x=
2. $2x^2$+3x=
3. $8x^2$-2x=
4. $3x^2$-x=
5. $7x^2$-9x=

Resuelve las siguientes ecuaciones con el método del trinomio cuadrado perfecto.

1. x^2+4x=6
2. x^2+10x-3=0
3. x^2+2x-5=0
4. x^2-3x+2=0
5. x^2-x-19=0

Resuelve las siguientes ecuaciones con el método del trinomio cuadrado perfecto.

1. $3x^2$+4x-1=0
2. $6x^2$+2x-24=0
3. $4x^2$+3x-1=0
4. $2x^2$-1x-12=0
5. $7x^2$-8x-6=0

Resuelve las siguientes ecuaciones usando la formula general.

1. x^2-3.5x-5.8=0
2. $-3x^2$-2x+5=0
3. (x-8)(x+4)=12
4. $\frac{x}{x-5} = \frac{x}{x-3}$
5. $1 - \frac{20}{x^2} = \frac{8}{x}$

Contesta ¿verdadero o falso?, justificando la respuesta.

1. En la ecuación $ax^2+bx+c=0$, si ax^2+bx+c es un trinomio cuadrado perfecto se tendrá una solución real de multiplicidad dos

___

___

2. La ecuación $3x^2= 4x-7$, tenemos que el discriminante es $D= (4)^2-4(3)(-7)=100$

___

___

3. Si $dx^2+ex+f=0$ con $d \neq 0$. Entonces $D= d^2-4(d)(f)$

___

___

4. No se puede calcular el discriminante en la ecuación $x^2 -7=0$

___

___

5. Si a=2, b=-3 y c= -4, entonces $b^2-4\,ac = 41$

___

___

6. Si el discriminante es cero entonces no hay soluciones imaginarias

___

___

7. Si $b^2 - 4ac$ > o, entonces $ax^2+bx+c=0$ tiene dos soluciones reales. ________

___

___

8. Para resolver $2x-3x^2=6$ mediante la fórmula cuadrática, se pueden escribir los valores de la siguiente forma: a=3, b=-2 y c=6

____

____

9. Si la solución de la ecuación cuadrática es x= w siendo w un número real, entonces el discriminante es negativo.

____

____

10. Se pueden presentar ecuaciones cuadráticas que tengan una solución real y una solución imaginaria.

____

____

Utilizando el discriminante indica cuantas soluciones tiene cada ecuación.

1. $x^2 + 5x + 6 = 0$
   ____
2. $x^2 + 2x = -8$
   ____
3. $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{1}{3}$
   ____
4. $4 + 20X - 25x^2 = 0$
   ____
5. $9(2x-6)^2=2$
   ____

¿Qué valor debe de tener "P", en la ecuación dada, ¿para que se tenga una solución real?

1. $Px^2-12x+9=0$ P=______________________
2. $\frac{1}{2}x^2 + 24x + 288 = 0$ P=______________________

Examen de autoevaluación

Los siguientes ejercicios tienen la finalidad de poner a prueba los conocimientos adquiridos en esta unidad.

1. Resuelve por **factorización** la siguiente ecuacion cuadratica:

$$x^2-5x-6=0$$

2. Resuelve por **despeje** la siguiente ecuacion cuadratica:

$$\frac{2x}{3}=\frac{6}{x}$$

3. Resuelve por el método **de trinomio cuadrado perfecto** la siguiente ecuación cuadrática:

$$X^2-11x-26=0$$

4. Resuelve aplicando la **fórmula general** para encontrar las soluciones de la siguiente ecuación cuadrática:

$$2x^2-5x-1=0$$

5. Resuelve por el método de **diferencia de cuadrados** la siguiente ecuación cuadrática:

$$144x^2-169=0$$

6. Resuelve por **factorización** la siguiente ecuacion cuadratica:

   a) $2x^2=8x$
   b) $21x^2-7x=0$

7. Resuelve por **método por factores** la siguiente ecuacion cuadratica

$$16X^2+24x-9=0$$

8. Cambia la ecuación $y=3(x-2)^2+6$ a la forma $y= ax^2+bx+c$

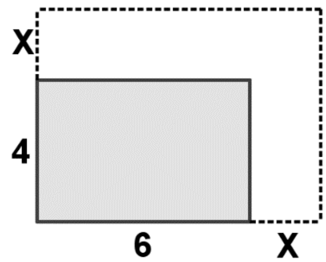
9. Cambia la ecuación $y=x^2+x-2$ en a la forma $y=(x-h)^2+k$

10. Hallar el número tal que:

    a) Su cuadrado es doce más que el numero
    b) Su cuadrado disminuido en el triple del número es dieciocho

c) El producto del número, por cuatro menos que el número es treinta y dos
d) El cuadrado de uno más que el número es cuatro más que cuatro veces el número.

11. Se tiene un terreno rectangular. El terreno mide 4m de ancho por 6m de largo. Si se desea aumentar cada lado en la misma magnitud para obtener un espacio de $48m^2$¿Cuáles son las nuevas dimensiones del terreno?



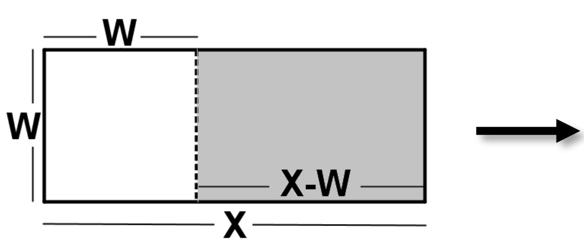
12. Comprueba que la suma de las soluciones de cualquier ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ siempre es: $-\frac{b}{a}$

13. Comprueba que el producto de las soluciones de cualquier ecuación de la forma $ax^2+bx+c=0$ siempre es: $\frac{c}{a}$

14. Usa el discriminante para determinar el número de soluciones de cada ecuación cuadrática dada a continuación:

a) $x^2-6.33x+3.7=0$
b) $16x^2-648x+6562=0$
c) $-2x^2-403=0$

15. Los griegos para la construcción de sus templos usaban el principio del "rectángulo dorado" el cual nos dice que; si se dibuja un cuadrado en un extremo de un rectángulo dorado, los lados del rectángulo resultante son proporcionales al rectángulo original es decir:



$$\frac{X}{W} = \frac{W}{X - W}$$

Si la longitud del largo de un rectángulo dorado es 10m ¿Cuánto vale el ancho?

MATEMÁTICAS II

MATEMÁTICAS II

UNIDAD 2

FUNCIONES CUADRÁTICAS

ACTIVIDAD 1

INTRODUCCIÓN A FUNCIONES CUADRÁTICAS

ACCIÓN 1
PROBLEMAS DE MODELACIÓN CON FUNCIÓN CUADRÁTICA

ACCIÓN 2
LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

ACCIÓN 3
PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON FUNCIONES CUADRÁTICAS

ACCIÓN 1

PROBLEMAS DE MODELACIÓN CON FUNCIÓN CUADRÁTICA

Objetivo: al concluir la acción, el alumno debe haber aprendido los significados intuitivos de una función cuadrática lo suficiente como para ser capaz de modelar diversas situaciones reales con ella.

> **AL ESTUDIANTE:** lo que vamos a ver en este momento es la síntesis de dos temas que ya dominas pues los viste en Matemáticas I: Función Lineal y en la Unidad 1 de Matemáticas II Ecuación Cuadrática. Verás que la *función cuadrática* no se limita a recoger conceptos vistos en esos temas, sino que va a enriquecerlos, de tal forma que, te va a permitir modelar problemas nuevos, distintos a los que hasta ahora has podido resolver; y otros que ya resolviste con ecuaciones cuadráticas los vas a afrontar con una de las herramientas matemáticas más potentes que existen: las funciones.

Debes recordar que en matemáticas una VARIABLE es una característica o magnitud que tiene *variación*. Si en una relación o correspondencia entre dos variables **x** y **y** en la que cada valor de la variable **x** determina un valor de la variable **y**, entonces **x** es una VARIABLE INDEPENDIENTE; por lo mismo, la **y** es una VARIABLE DEPENDIENTE. Una relación o correspondencia entre una variable independiente **x** y una variable dependiente **y**, se representa $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$.

Una CORRESPONDENCIA es la relación existente entre dos características o magnitudes de un proceso u objeto dado, que se da cuando las variaciones de una de ellas siempre van acompañadas por variaciones en la otra característica.

Una FUNCIÓN LINEAL es la correspondencia entre una variable independiente **x** y una variable dependiente **y** de la forma $\mathbf{y = ax + b}$ en donde **a** y **b** son constantes. Una notación más adecuada para la función lineal se obtiene al sustituir **y** por **f(x)**, quedando $\mathbf{f(x) = ax + b}$.

Una ECUACIÓN LINEAL CON UNA INCÓGNITA es una ecuación algebraica que se puede reducir a una ecuación de la forma $\mathbf{ax + b = 0}$.

En la ecuación lineal **x** tiene el significado de *un solo valor desconocido* llamado *incógnita*, que es *el único* que satisface la igualdad $ax + b = 0$. En cambio, la función lineal representa la correspondencia $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$ o $\mathbf{f(x) = ax + b}$ entre las dos variables.

La función lineal permite hacer una gráfica en un sistema de ejes coordenados donde la abscisa y la ordenada son los valores (**x** , **y**) que satisfacen la función lineal con dos incógnitas $\mathbf{y = ax + b}$; gráfica que es una línea recta en la que todos los puntos satisfacen la ecuación lineal con dos incógnitas. La gráfica de una línea recta (que no sea vertical) puede interpretarse como la gráfica de una función lineal o también como la gráfica del conjunto solución de una ecuación lineal con dos incógnitas, que son dos conceptos diferentes, por eso se considera que la gráfica es el puente conceptual entre ambas nociones; se está analizando la equivalencia

entre la relación de dos variables **x** y **f(x)** (independiente y dependiente) de la función lineal **f(x) = ax + b** con las dos incógnitas (**x** , **y**) de la ecuación lineal **y = ax + b**, con base en una línea recta que es a la vez la gráfica de una función lineal y del conjunto solución de la respectiva ecuación lineal.
En Matemáticas I estudiamos el tema de sistemas 2×2 de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y vimos que su solución, cuando es única, es la intersección de las dos gráficas de las funciones lineales correspondientes a las ecuaciones del sistema.

Ahora vamos a partir de la ECUACIÓN CUADRÁTICA CON UNA INCÓGNITA en su forma más general $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ para convertirla en una FUNCIÓN CUADRÁTICA sustituyendo el número cero por **y**, y así tenemos $\mathbf{y} = a\mathbf{x}^2 + b\mathbf{x} + c$ con lo que, **x** en vez de incógnita se convierte en la variable independiente y la variable dependiente es **y**.

Al sustituir **y** con **f(x)** tenemos la siguiente definición**:**

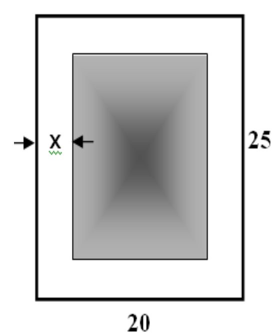
Una función cuadrática* f(x) *expresada en la forma general o estándar es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con* a, b *y* c *constantes y* a $\neq$ 0*, a las que se les llama* parámetros *de* f(x)*.

Para precisar los significados abstractos que acabamos de desarrollar vamos a trabajar los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Para la edición de un libro el diseñador está estudiando las variaciones entre el margen y el área del texto para definir el tamaño del rectángulo ocupado por lo impreso en cada página (que los editores llaman “caja”). El área de impresión por página está en función de los márgenes, que deben medir lo mismo todos ellos y cada hoja mide 20 cm de ancho por 25 de largo. Para estudiar la correspondencia entre el tamaño de los márgenes y el área ocupada por la caja llena la siguiente tabla, traza su gráfica y describe la función en su forma general o estándar que modela esta situación.



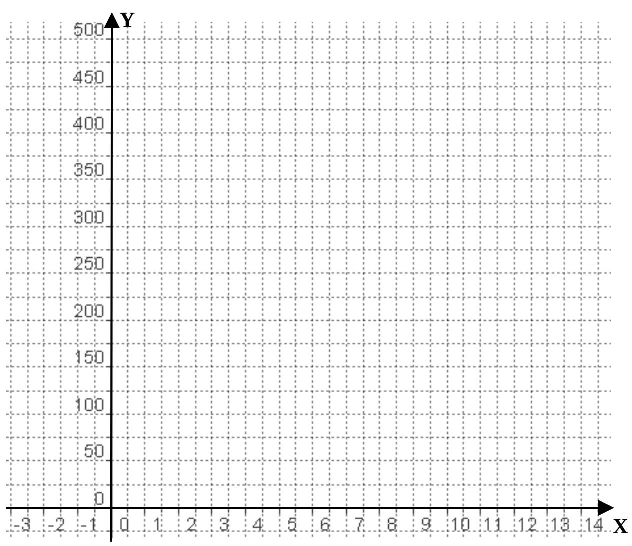
Solución. Para empezar, localizamos con base en el dibujo, cuáles son las variables involucradas en el problema, determinando cuál es la variable independiente **x** y cuál la variable dependiente **f(x)**. Así tenemos que **x** (la medida de los márgenes) es la variable independiente porque su valor determina el tamaño de la caja o área de texto, que es la variable dependiente **f(x)**.

Para estudiar la correspondencia **x** → **f(x)**, llena la siguiente tabla y traza su respectiva gráfica.

Tabla 1

x	f(x)	x	f(x)
0		2.5	
0.5		3	
1.0		5	
1.5		10	
2.0			

Gráfica 1



Por último, establece la función f(**x**) que modela este ejemplo.

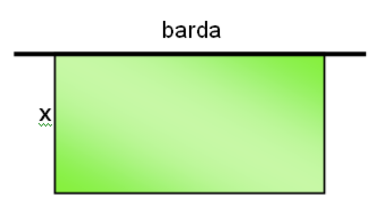
f(**x**) = _______________

Expresa esta función en la forma general o estándar

f(**x**) = _______________

¿Es cuadrática esta función? ____ en caso afirmativo ¿cuánto valen los parámetros? **a** = _____, **b** = _____ y **c** = _____.

Ejemplo 2. Para sus estudios experimentales en botánica, un grupo de estudiantes va a cercar un terreno rectangular utilizando como uno de sus lados la barda existente en la parte trasera del plantel y cuentan para ello con 40m de reja. Saben que, si varía el ancho y el largo del terreno, también varía su área, por eso estudian la correspondencia entre la variable independiente **x** = “longitud de los lados perpendiculares a la barda” (como se muestra en la figura) y la variable dependiente **f(x)** = “área del terreno cercado”, para determinar las dimensiones del terreno que proporcione la mayor área que permita aprovechar al máximo el terreno. Para que tú encuentres las dimensiones que buscan los estudiantes llena la siguiente tabla y traza su gráfica, además determina el modelo matemático más general y abstracto.



Solución. Llena la tabla y traza la gráfica.

Gráfica 2

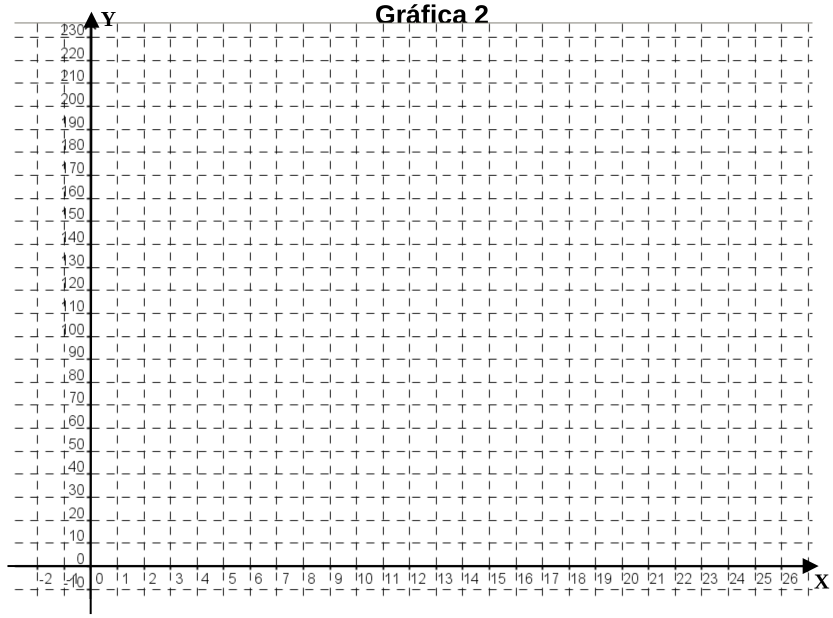


Tabla 2

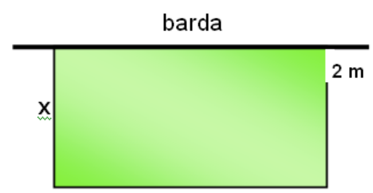
x	f(x)	x	f(x)
0		11	
3		12	
5		15	
8		17	
9		20	
10			

La función f(**x**) que modela este ejemplo es: f(**x**) = ________________

Con base en la tabla o en la gráfica de f(**x**) di cuánto valen las dimensiones (ancho y largo) del terreno que corresponden a la mayor área. Ancho _______, largo _______, y a cuánto asciende el valor de dicha área ________.

La función f(x) es cuadrática, ¿cuánto valen los parámetros? **a** = _____, **b** = _____ y **c** = _____.

Ejemplo 3. En el ejemplo anterior, si el grupo de alumnos decide dejar un acceso libre de 2m sin reja como se muestra en la figura, determina las dimensiones del terreno que corresponden a la mayor área utilizando la tabla 3 y dibujándola sobre la gráfica 2, además formula el modelo matemático más general y abstracto.



Solución. Llena la siguiente tabla y dibújala en la gráfica 2 usando un color diferente.

Tabla 3

x	0	2	4	8	9	10	11	12	13	17	19	21	22
y													

La función f(**x**) es: f(**x**) = ________________. Esta función también es cuadrática ¿cuánto valen los parámetros? **a** = _____, **b** = _____ y **c** = _____.

Con base en esta tabla o en su gráfica di cuánto valen las dimensiones del terreno que corresponden a la mayor área. Ancho _______, largo _______, y a cuánto asciende el valor de dicha área ________.

Al dejar un acceso libre tuvimos un aumento en el perímetro, ¿cuánto aumentó cada lado?, ancho _______, Largo _______, y ¿cuánto aumentó el área máxima? _____.

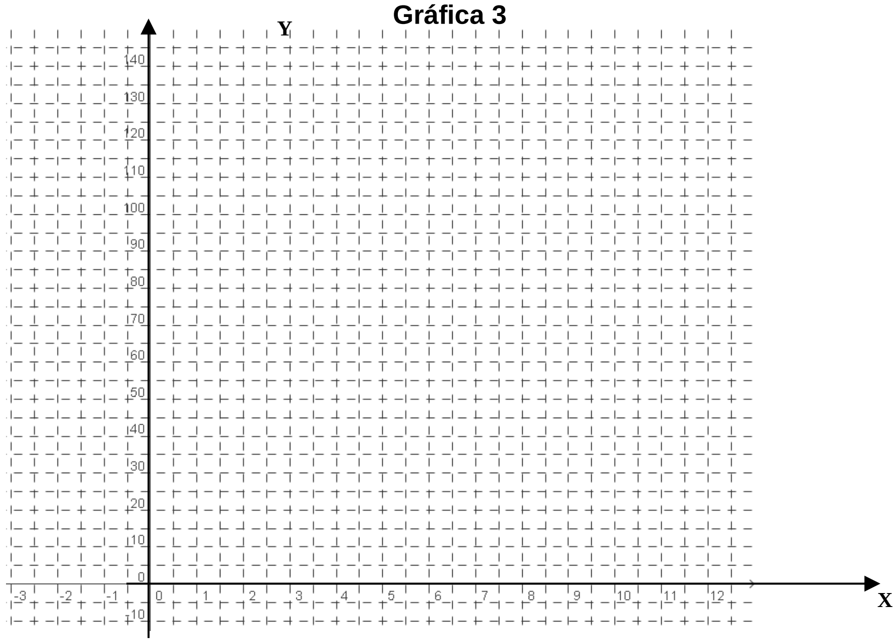
Ejemplo 4. Supón que hay varias medidas para la cuerda elástica de un *bundee*, lo que permite que una persona pueda escoger entre diferentes alturas para su caída. La longitud de la cuerda elástica *equivale a la distancia recorrida en caída libre por una persona*. Al tener variación, la distancia es una variable que depende del tiempo que dure la caída, es decir **d** = 5**t**^{2}, como vimos en el ejemplo 5 de la actividad Ecuación Cuadrática. Llena la tabla y traza la gráfica, en la gráfica 3 que describe la correspondencia entre la variable tiempo **t** como variable independiente y la variable distancia **d(t)** como variable dependiente.

Solución. Empieza llenando la tabla (**t** = 0 significa que tuvo miedo y se bajó sin lanzarse en el Bungee), después haz la gráfica y por último expresa el modelo abstracto.

Tabla 4

t	d(t)
0	
0.5	
1	
1.5	
2	
2.5	
3	
4	
5	
7	

Gráfica 3



La función f(**x**) es: f(**x**) = _______________. Esta función es cuadrática ¿cuánto valen los parámetros? **a** = _____, **b** = _____ y **c** = _____.

Pasemos a analizar la función distancia con las diferencias finitas, recordemos que en la unidad 2 de Matemáticas I vimos como variaban las cantidades, los cambios de un valor a otro de la variable independiente también generan un cambio en la variable dependiente, que expresamos de la siguiente manera:
Cuando una magnitud cambia de un valor a otro, decimos que dicha magnitud ha sufrido un ***incremento*** y el valor del incremento es la magnitud del cambio que se calcula con la diferencia del valor final menos el valor inicial. Así podemos establecer que:

INCREMENTO = VALOR FINAL – VALOR INICIAL

Analicemos en una tabla estos incrementos en la distancia recorrida las cuales llamaremos diferencias finitas, en la cual se determinará la primera diferencia finita y la diferencia de las diferencias observando los resultados obtenidos.

Tabla 5

t	**d(t)=5t²**	Primera diferencia (PD)	Segunda diferencia
0	$d_1 = 0$		
0.5	$d_2 = 1.25$	$d_2 - d_1 = 1.25 - 0 = 1.25 = PD_1$	
1	$d_3 = 5$	$d_3 - d_2 = 5 - 1.25 = 3.75 = PD_2$	$PD_2 - PD_1 = 2.5$
1.5	$d_4 = 11.25$	$d_4 - d_3 = 11.25 - 5 = 6.25 = PD_3$	$PD_3 - PD_2 =$2.5
2	$d_5 = 20$	$d_5 - d_4 = 20 - 11.25 = 8.75 = PD_4$	$PD_4 - PD_3 =$2.5
2.5	$d_6 = 31.25$	$d_6 - d_5 = 31.25 - 20 = 11.25 = PD_5$	$PD_5 - PD_4 =$
3	$d_7 = 45$	$d_7 - d_6 = 45 - 31.25 = 13.75 = PD_6$	
3.5	61.25	16.25	
4	$d_8 = 80$	$80 - 61.25 = 18.75 = PD_7$	
4.5	$d_9 = 101.25$	$101.25 - 80 = 21.25 = PD_8$	
5	$d_{10} = 125$	$125 - 101.25 = 23.75 = PD_9$	

¿Qué características tienen las primeras diferencias finitas?

____

¿Qué características tienen las segundas diferencias finitas?

____

¿Qué diferencias encuentras entre las primeras diferencias finitas y las segundas diferencias finitas? ____

¿Consideras que este comportamiento se cumple en cualquier función cuadrática?

___

Ejemplo 5. En la caída libre de los cuerpos, además de la distancia, la velocidad también va incrementándose continuamente a medida que pasa el tiempo, así tenemos otra función en la que el tiempo es la variable independiente y la velocidad es la variable dependiente. Si un cuerpo se suelta partiendo del reposo la segunda ecuación del movimiento es ahora **v(t)** = g**t** en donde g es la constante de gravedad cuyo valor es 9.8 m/seg^2; si aproximamos el valor de g = 10 la correspondencia **t** → **v** es **v(t)** = 10**t** con **t** medido en segundos y **v** en m/seg.

Para estudiar la velocidad que alcanza una persona en caída libre al lanzarse del Bungee llena la siguiente tabla y represéntala geométricamente sobre la gráfica 3, después escribe el modelo matemático más general y abstracto.

Solución. Llena la tabla y dibújala sobre la gráfica 3 usando otro color.

Tabla 6

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5	7	10
v(t)											

La relación que describe el movimiento tiempo-velocidad es una función lineal, escríbela g(**x**) = _______. En esta función los valores de los parámetros son: a = ___ b = ___.

Tomando como base la gráfica 3 ¿a qué conclusiones llegas con las funciones que modelan la primera ley del movimiento f(**x**) = 5**x**^{2} y la segunda ley g(**x**) = 10**x**?

___

Haz los razonamientos y cálculos necesarios para que contestes ¿las dos leyes de movimiento (**t** → **d** y **t** → **v**) tiene razón de cambio directamente proporcional? Escribe tu respuesta y explica por qué. ________________________________
____.

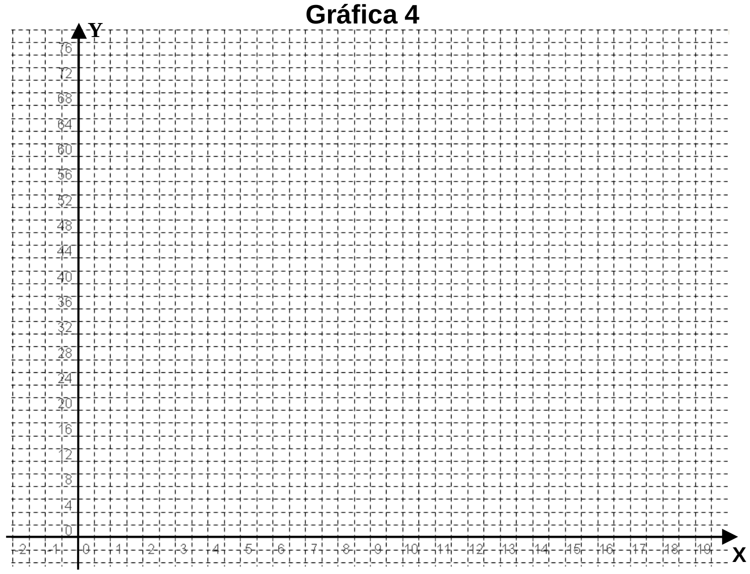
Ejemplo 6. En las sumas de Gauss tenemos una correspondencia en la que a cada número natural le corresponde la suma de los números naturales empezando con el 1 y terminando hasta dicho número. Es decir, las sumas de Gauss nos proporcionan una función cuadrática en donde la variable independiente **n** es un número natural y la variable dependiente **f**(**n**) es la fórmula que nos dice cuánto vale la suma desde el 1 hasta **n,** que tú ya conoces. Si **n** = 1 vamos a decir que la suma de Gauss es **f**(1) = 1, con esta convención llena la siguiente tabla, grafica los puntos discretos de dicha tabla y expresa la función cuadrática en la forma general o estándar.

Solución.

Tabla 7

n	f(n)
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

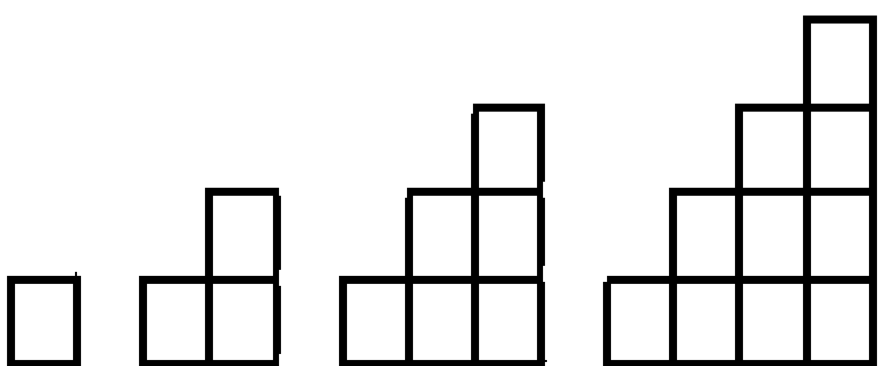
Gráfica 4



Para expresa la función cuadrática en su forma general o estándar recuerda que la suma de los primeros números naturales obedece la fórmula $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

f(**x**) = ___________

Ahora vamos a considerar el siguiente problema relacionado con las sumas de Gauss. Se quiere construir una pirámide con bloques como se muestra en la siguiente figura. Los bloques son cubos de lado una unidad. ¿Cuántos bloques se necesitan para construir una pirámide de 50 niveles?; ¿Cuántos bloques se necesitan para construir una pirámide de 100 niveles? Y ¿Cuántos bloques se necesitan para construir una pirámide de n niveles?
En este problema puedes asociar un bloque con el número 1, dos bloques con el número 2 y así sucesivamente teniendo de nuevo las sumas de Gauss.



n=1 n=1 + 2 n=1 +2 + 3 n=1 + 2 + 3 + 4 •••

Entonces la función que modela este problema es la que vimos anteriormente $f(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ en su forma estándar.

Analiza las diferencias finitas como en el ejemplo cuatro completando la siguiente tabla.

Tabla 8

n	$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$	Primera diferencia (PD)	Segunda diferencia
1	1		
2	3	3-1=2	
3	6		3-2=1
4			
5	15	15-10=5	
6			6-5=1
• • •			
99	4950		
100		5050-4950=100	

Ahora con base en los resultados responde las siguientes preguntas:
¿Qué características tienen las primeras diferencias finitas?

___

¿Qué características tienen las segundas diferencias finitas?

___

¿Qué diferencias encuentras entre las primeras diferencias finitas y las segundas diferencias finitas? ___

¿Consideras que este comportamiento se cumple en cualquier función cuadrática?

___

Con las observaciones del ejemplo 4 y los resultados de este ejemplo puedes concluir
¿que este comportamiento se cumple en cualquier función cuadrática?

___

Analicemos las diferencias finitas para una función lineal, recordemos el ejemplo que vimos en la unidad 2 de Matemáticas I.

Retomemos un ejemplo que ya vimos: deseas saber cuánta gasolina consumirías al usar un automóvil nuevo; en el manual del conductor dice que el rendimiento es de 16 kilómetros por litro de gasolina, con este dato puedes llenar la tabla que sigue.

Tabla 9

GASOLINA EN LITROS X	DISTANCIA EN KM	Primera diferencia (PD)	Segunda diferencia
2	32		
4	64	64-32=32	
6	96	96-64=32	32-32=0
8	128	128-93=32	32-32=0
10	160	160-96=	32- =
12	192		
14	224		
16	256		
18	288		
20	320		

Lo que podemos observar de la tabla anterior es:
¿Qué características tienen las primeras diferencias finitas?

____

¿Qué características tienen las segundas diferencias finitas?

____

¿Qué diferencias encuentras entre las primeras diferencias finitas y las segundas diferencias finitas? ____

¿Consideras que este comportamiento se cumple en cualquier función lineal?

____

Para el concepto de diferencias finitas espero que hallas observado en las tablas los siguientes aspectos. La variable independiente en el ejemplo cuatro, toma valores en la *tabla 5,* de 0.5 unidades cada vez, y para el ejemplo seis en la *tabla 8,* de unidad en unidad cada vez.
La variación o primera diferencia finita es variable conforme a las diferencias obtenidas, mientras que la segunda variación o sea la variación de la variación llamada en la tabla segunda diferencia finita es ***constante.*** Con este resultado podemos concluir lo siguiente:

Para una función lineal la ***primera diferencia finita es constante***
Y
Para una función cuadrática la ***segunda diferencia finita es constante***

Ejemplo 7. También al inicio de Matemáticas I, en la acción 1 de la unidad I del paquete didáctico viste que el algoritmo para sumar los primeros números impares obedece la fórmula $1+3+5+...+m=\frac{(m+1)^2}{4}$, siendo **m** un número impar, y para la suma de los primeros números pares se tiene $2+4+6+...+m=\frac{m(m+2)}{4}$ en donde **m** es un número par. Así que tenemos ahora dos funciones cuadráticas. De nuevo, llena las tablas 7 y 8 y dibuja los puntos discretos de cada una usando diferentes colores en la gráfica 4 y expresa el modelo matemático más general y abstracto para cada caso.

Solución. a) Para la suma de los números impares completa la tabla 7 y dibuja los puntos en la gráfica 4 con un color diferente.

Tabla 10

n	1	3	5	7	9	11	13	15
f(n)								

La función cuadrática en su forma general es:

f(**x**) = __________

b) Para la suma de los primeros números pares completa la tabla 11 y también dibuja los puntos en la gráfica 4 con otro color.

Tabla 11

n	2	4	6	8	10	12	14	16
f(n)								

Finalmente expresa la función cuadrática en su forma general o estándar.

f(**x**) = __________

Observa que las gráficas de las correspondencias o funciones para las sumas de Gauss de los primeros **n** números naturales, $\mathbf{f(n)=\frac{n(n+1)}{2}}$, para las sumas de los primeros **m** números impares $f(m)=\frac{(m+1)^2}{4}$ y $\mathbf{f(m)=\frac{m(m+2)}{4}}$ para para las sumas de los primeros **m** números pares están dibujadas con puntos y no con trazos continuos debido a que la variable independiente toma valores únicamente en los números naturales, es decir son correspondencias *discretas*, en cambio la gráfica del modelo matemático más general y abstracto es el dibujo de una parábola realizado con un trazo continuo. El registro algebraico de cada uno de estos modelos es:

Para las sumas de Gauss	**Para las sumas de los impares**	**Para las sumas de los pares**
$f(\mathbf{x}) = 0.5\mathbf{x}^2 + 0.5\mathbf{x}$	$f(\mathbf{x}) = 0.25\mathbf{x}^2 + 0.5\mathbf{x} + 0.25$	$f(\mathbf{x}) = 0.25\mathbf{x}^2 + 0.5\mathbf{x}$

En los siguientes ejercicios analizaremos completando las tablas si las funciones involucradas son lineales o cuadráticas a partir de las diferencias finitas (DF).

Tabla 12

x	y	DF 1	DF 2
0	500		
1	414		
2	336		
3	266		
4	204		
5	150		
6	104		
7	66		
8	36		
9	14		
10	0		

Tabla 13

x	y	DF 1	DF 2
0	-3		
1	3		
2	9		
3	15		
4	21		
5	27		
6	33		
7	39		

Tabla 14

x	y	DF 1	DF 2
-2	56		
-1	25		
0	6		
1	-1		
2	4		
3	21		

Tabla 15

x	y	DF 1	DF2
0	-18		
2	-17		
4	-16		
6	-15		
8	-14		
10	-13		
12	-12		

Contesta las siguientes preguntas para cada una de las tablas anteriores:
¿La tabla representa una función lineal o cuadrática?

Tabla 12 ____________ **Tabla 13**____________

Tabla 14_____________ **Tabla 15**____________

De las tablas anteriores con las diferencias finitas puedes diferenciar entre una función lineal o una cuadrática. Ahora la pregunta sería: ¿cuál es esa función cuadrática?, ¿cómo la puedes obtener?
Vamos a analizar esa situación con la tabla 14. Comenzamos por expresar a la función en su forma estándar $f(x) = ax^2 + bx + c$ y darnos cuenta de que lo que necesitamos conocer son los valores (parámetros) de a, b, c para tener la expresión

de la función. Para resolver esta situación, hay que establecer un sistema de ecuaciones con las condiciones establecidas en la tabla con relación a la variable independiente y la variable dependiente de la siguiente forma.
Por ejemplo,

Si $x = 0$ $\quad f(0) = a0^2 + 0(1) + c = 6$ $\quad$ ecuación 1
Si $x = 1$ $\quad f(1) = a1^2 + b1 + c = -1$ $\quad$ ecuación 2
Si $x = 2$ $\quad f(2) = a2^2 + b2 + c = 4$ $\quad$ ecuación 3

De la ecuación 1 tenemos que $\quad c = 6$ $\quad$ Ec. 4
De la ecuación 2 tenemos que $\quad a + b + c = -1$ $\quad$ Ec. 5
De la ecuación 3 tenemos que $\quad 4a + 2b + c = 4$ $\quad$ Ec. 6

Sustituyendo el valor de $c = 6$ en las ecuaciones 5 y 6 se obtiene

$$a + b = -7$$
$$4a + 2b = -2$$

Utilizando cualquiera de los métodos que viste en la unidad 4 de Matemáticas I al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene $a = 6 \;\; y \;\; b = -13$.
Ahora podemos expresar la función cuadrática que representa.

$$f(x) = 6x^2 - 13x + 6$$

Obtén las funciones de las tablas 12, 13 y 15 teniendo cuidado de distinguir si es lineal o cuadrática.

En los siguientes ejercicios analiza la variación a través de una tabla calculando las primeras y segundas diferencias finitas.

a) $f(x)=5x+3$ $\quad$ b) $g(x)=3x^2+2x-5$ $\quad$ c) $h(x)=0.25x^2+0.5x$

Después de que construyas las tablas y verifiques el comportamiento contesta las siguientes preguntas:
¿Existe alguna relación entre las primeras y segundas diferencias con la función lineal y con la cuadrática? ____
¿Cómo son las primeras diferencias de la función lineal? ____________________
¿Cómo son las primeras diferencias de la función cuadrática? _______________
¿Cómo son las segundas diferencias de la función lineal? ___________________
¿Cómo son las segundas diferencias de la función cuadrática? _______________

FIN DE LA ACCIÓN

ACCIÓN 2

LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Objetivo: el alumno aprenderá a graficar cualquier función cuadrática usando lápiz, papel y calculadora.

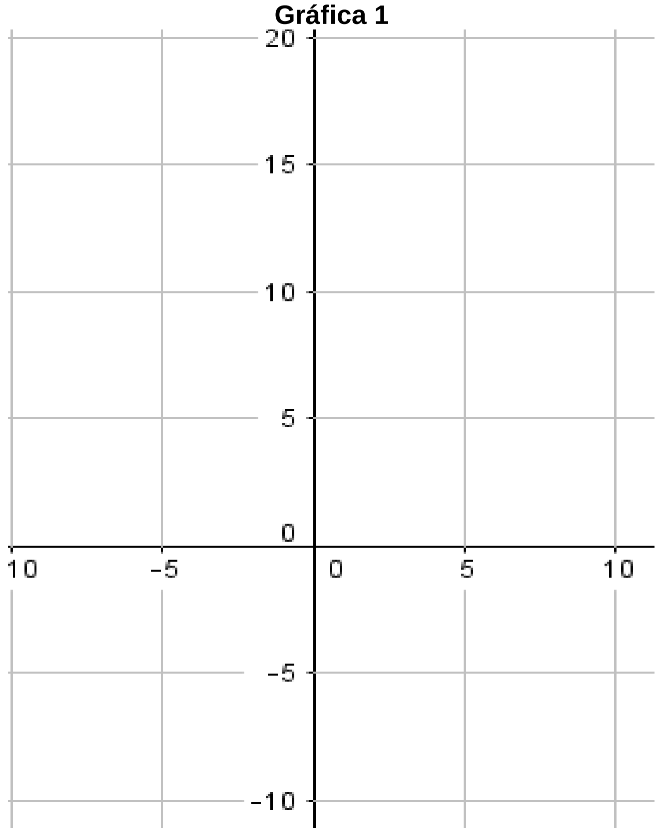
> **AL ESTUDIANTE:** en la acción pasada aprendiste a aplicar la función cuadrática para construir el modelo con el cual puedes resolver diferentes tipos de problemas; para que profundices en la lógica de la función cuadrática esta acción está enfocada al estudio de cómo graficar dicha función e interpretar su gráfica.

Ejemplo 1. En la siguiente tabla están indicadas cinco funciones cuadráticas de la forma $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + c$, llénala y dibújalas con colores diferentes en la gráfica 1.

Tabla 1

x	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	5
$f(x) = x^2$									
$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - 8$									
$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - 4$									
$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 4$									
$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 8$									

Gráfica 1



¿Qué efecto sobre la gráfica de f(**x**) = $\mathbf{x}^2$ tiene el valor de c en las cuatro funciones anteriores?
____.

¿Conocías la gráfica de una función cuadrática? ___, ¿cómo se nombran estas gráficas? ________, ¿el punto más bajo donde la gráfica se dobla se conoce cómo? ___________.
¿Cuáles de estas gráficas intersecan al eje X y en cuantos valores?
f(x) = x^2 ______________ f(**x**) = $\mathbf{x}^2 - 8$_______________ f(**x**) = $\mathbf{x}^2 - 4$______

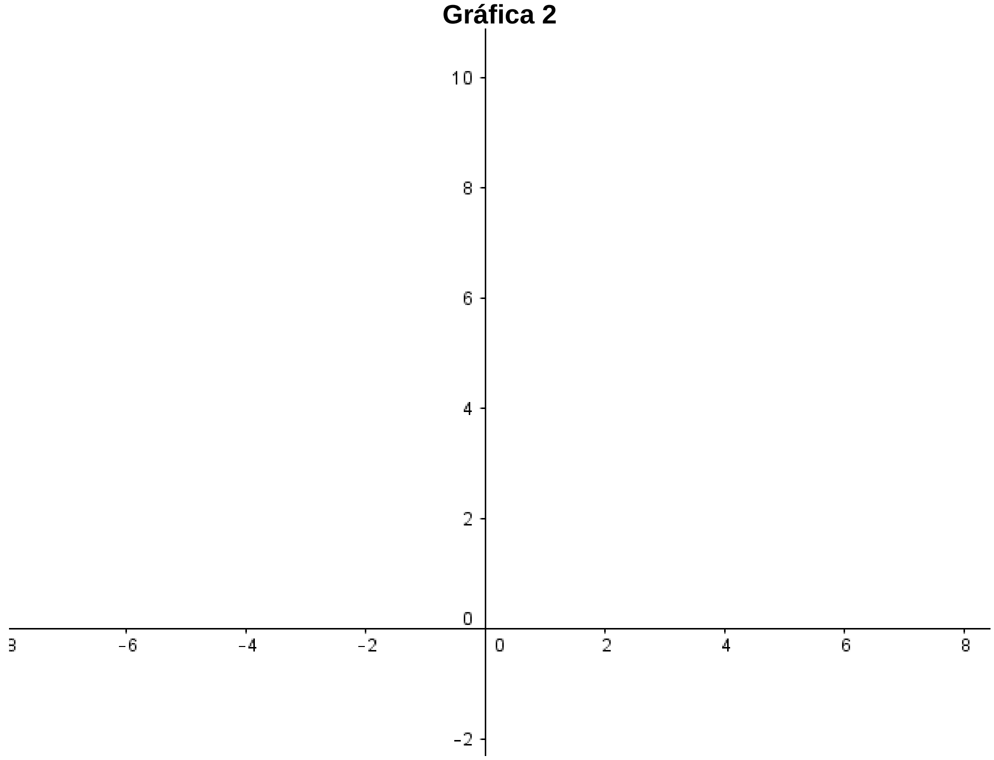
f(**x**) = $\mathbf{x}^2 + 4$ ________________ f(**x**) = $\mathbf{x}^2 + 8$ _______________

Ejemplo 2. Para que analices los efectos que causa el coeficiente "a" en las funciones indicadas, llena la siguiente tabla y dibújalas en la gráfica 2 con diferentes colores.

Tabla 2

x	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	5
f(x) = x^2									
f(**x**) = $0.25\mathbf{x}^2$									
f(**x**) = $0.75\mathbf{x}^2$									
f(**x**) = $1.5\mathbf{x}^2$									
f(**x**) = $2\mathbf{x}^2$									

Gráfica 2



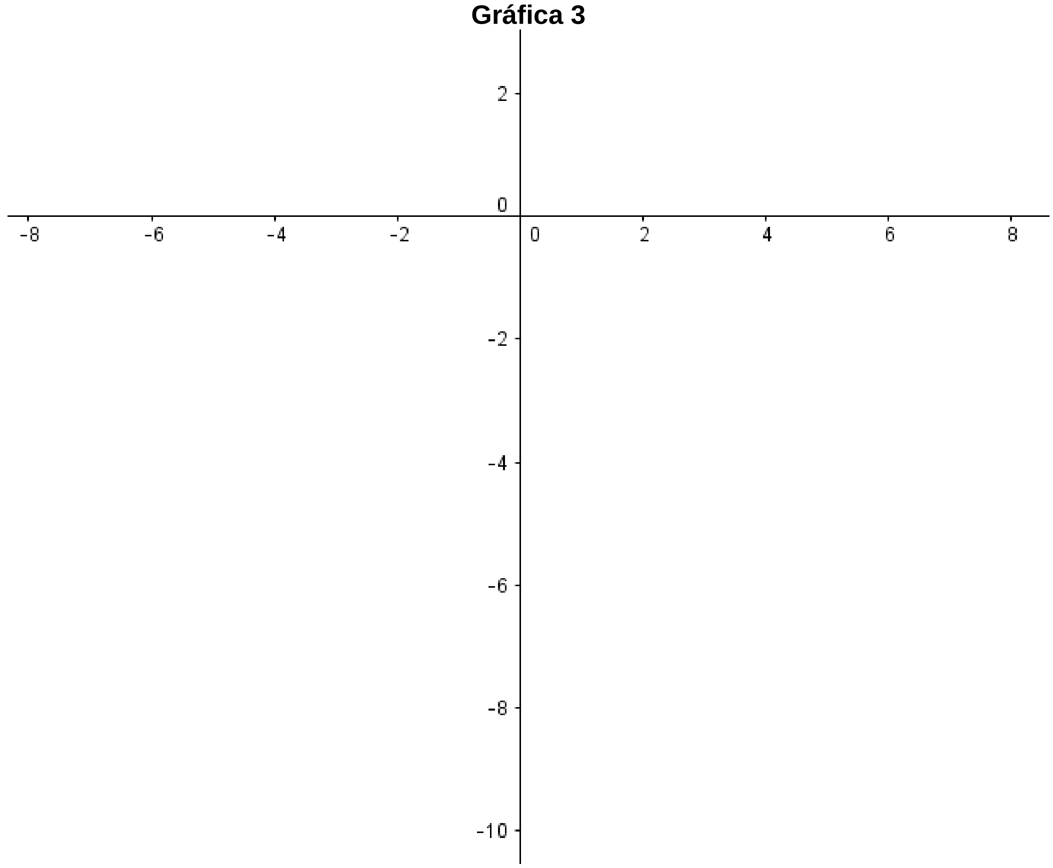
Analizando los valores de “a” que se asignaron a las funciones de la tabla 2 contesta lo siguiente: ¿Qué efecto tiene el coeficiente “a” sobre la gráfica de $f(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}^2$? ____.

Ejemplo 3. Se trata de que ahora analices los efectos del signo y los valores del coeficiente “a” sobre las funciones cuadráticas de la forma $f(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}^2$, para ello llena la tabla 3 y dibuja estas funciones en la gráfica 3 con diferentes colores.

Tabla 3

x	-5	-3	-2	-1	0	1	2	3	5
$\mathbf{f(x) = -x^2}$									
$f(\mathbf{x}) = -0.25\mathbf{x}^2$									
$f(\mathbf{x}) = -0.75\mathbf{x}^2$									
$f(\mathbf{x}) = -1.5\mathbf{x}^2$									
$f(\mathbf{x}) = -2\mathbf{x}^2$									

Gráfica 3



Con base en los ejemplos 2 y 3, en general, ¿a qué conclusiones llegas sobre los efectos del coeficiente “a” en la gráfica de $f(\mathbf{x}) = a\mathbf{x}^2$? ________________________
____.

Veamos ahora, el caso que corresponde a un trinomio cuadrado perfecto, es decir, cuando en la función cuadrática a$\mathbf{x}^2$ + b$\mathbf{x}$ + c es un trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo 4. Llena cada una de las siguientes tablas y dibuja las funciones cuadráticas en la gráfica 4 con colores diferentes.

Tablas 4

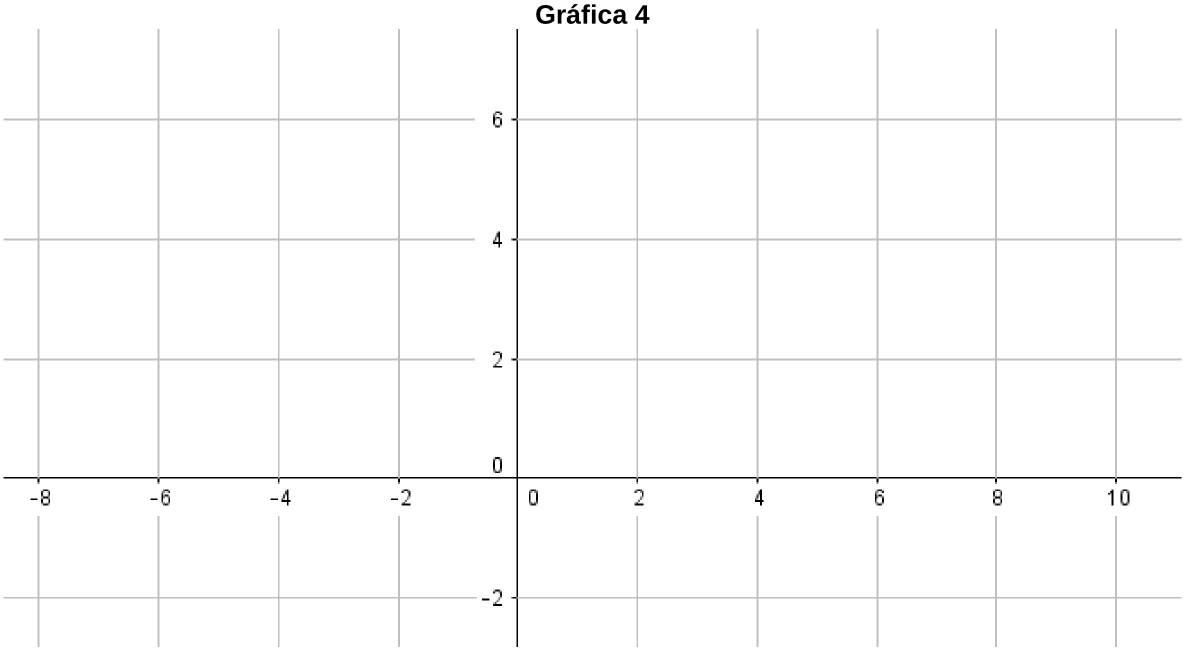
x	f(**x**)=$\mathbf{x}^2$+8**x**+16
-7	
-5	
-4	
-3	
-1	

x	f(**x**)=$\mathbf{x}^2$+2**x**+1
-4	
-2	
-1	
0	
2	

x	f(**x**)=$\mathbf{x}^2$-6**x**+9
0	
2	
3	
4	
6	

x	f(**x**)=$\mathbf{x}^2$-14**x**+49
4	
6	
7	
8	
10	

Gráfica 4



¿Qué característica particular observas en la gráfica de las funciones cuadráticas que son un trinomio cuadrado perfecto? ___________________________________.

Escribe las coordenadas del vértice de cada una de las cuatro parábolas que dibujaste.

Para f(**x**) = $\mathbf{x}^2$ + 8**x** + 16 el vértice es V(__ , __).
Para f(**x**) = $\mathbf{x}^2$ + 2**x** + 1 el vértice es V(__ , __).
Para f(**x**) = $\mathbf{x}^2$ - 6**x** + 9 el vértice es V(__ , __).
Para f(**x**) = $\mathbf{x}^2$ -14**x** + 49 el vértice es V(__ , __).

Si expresamos a; f(**x**) = x^2 + 8**x** + 16 en su forma factorizada f(**x**) = $(x + 4)^2$ salta a la vista una relación entre el trinomio cuadrado perfecto y el vértice V(-4 , 0) de la parábola que gráficamente representa.
Una argumentación teórica de esta relación es la siguiente: al ser la gráfica de f(**x**) una parábola que abre hacia arriba, el vértice es el punto donde la parábola dobla hacia arriba, es decir es el punto más bajo del dibujo al cual le corresponde el valor más pequeño de la variable dependiente **y** o f(**x**), además por ser $(x + 4)^2$ una expresión algebraica elevada al cuadrado no puede tomar valores negativos, así que el valor más pequeño (mínimo) que puede tomar es cero y esto ocurre para el valor de **x** = -4 al que le corresponde el valor de **y** = 0; por lo tanto las coordenadas del vértice son V(-4 , 0).

Ejemplo 5. Determina el vértice de las gráficas de las funciones indicadas en las tablas 5, luego elabora cada tabla con valores de **x** adecuados y calcula los correspondientes valores de **y** para que las dibujes en la gráfica 5 usando colores diferentes. Además, indica los puntos donde se interseca la parábola con el eje X.

Solución. El vértice de la primera función es; V(__ , __) de la segunda es; V(__ , __) y de la tercera es; V(__ , __).

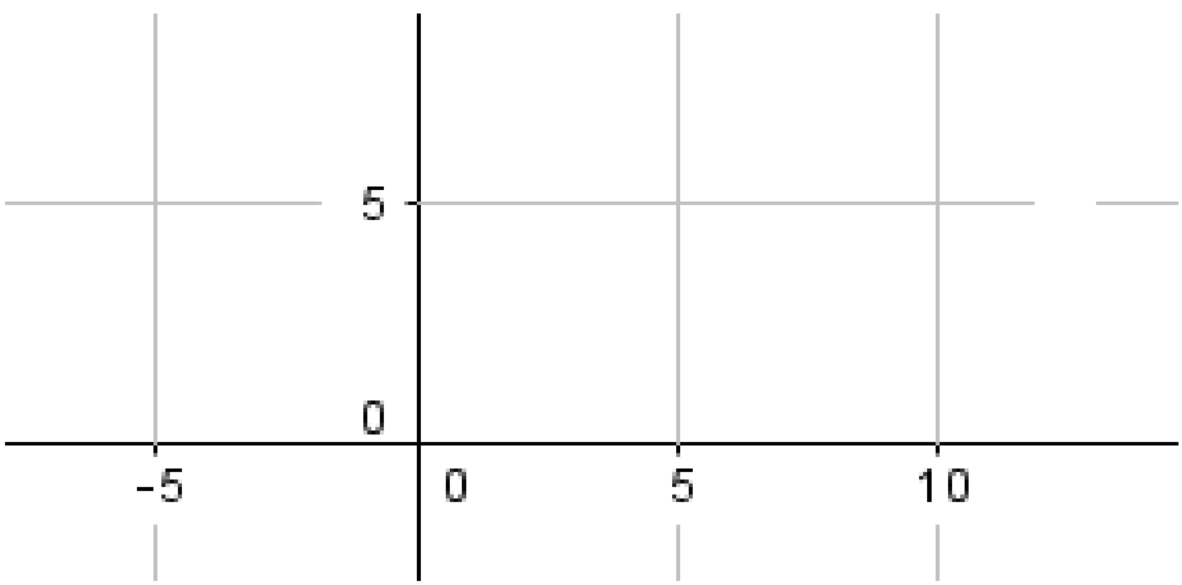
Tablas 5

x	f(**x**)=x^2-10**x**+25

x	f(**x**)=x^2-20**x**+100

x	f(**x**)=x^2+4**x**+4

Gráfica 5

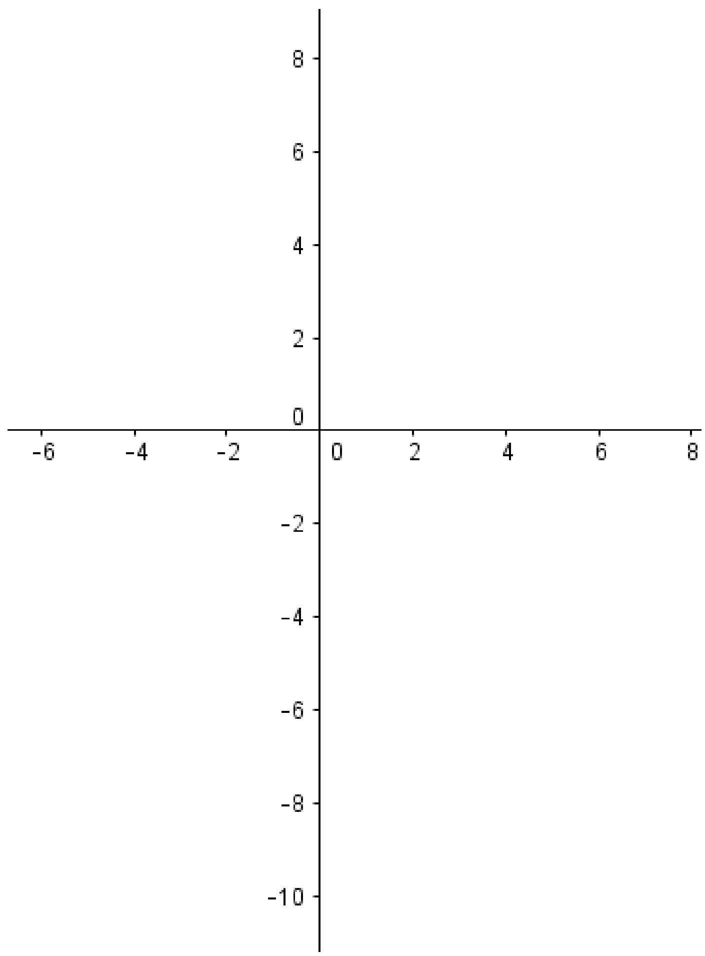


Ejemplo 6. Con base en la tabla 6 dibuja la función f(**x**) = x^2 - 2**x** – 8 en la gráfica 6. Indica en cuantos puntos se interseca con el eje X y en qué puntos.

Tabla 6

x	**y** = f(**x**)
-3	
0	
1	
2	
5	

Gráfica 6



Ejemplo 7. Con lo que has aprendido en los ejemplos anteriores, ahora podrás dibujar las siguientes funciones sin auxiliarte de alguna tabla teniendo únicamente como patrón la gráfica de la función del ejemplo anterior. Dibuja las funciones que a continuación se indican en la gráfica 6, usando diferentes colores. Indica para cada una de ellas, en cuantos puntos se interseca con el eje X y en qué puntos.

a) f(**x**) = x^2 - 2**x** - 11   b) f(**x**) = x^2 - 2**x** + 8   c) f(**x**) = x^2 - 2**x** + 1   d) f(**x**) = x^2 - 2**x** + 3

AL ESTUDIANTE: en estos ejemplos has trazado la gráfica de las funciones con la ayuda de una tabla, salvo el último en que las dibujaste con base en una gráfica como patrón. Ahora debes reflexionar e integrar tus conocimientos adquiridos para que por cuenta propia construyas una tabla que te permita dibujar la gráfica de una función cuadrática con sólo cinco puntos.

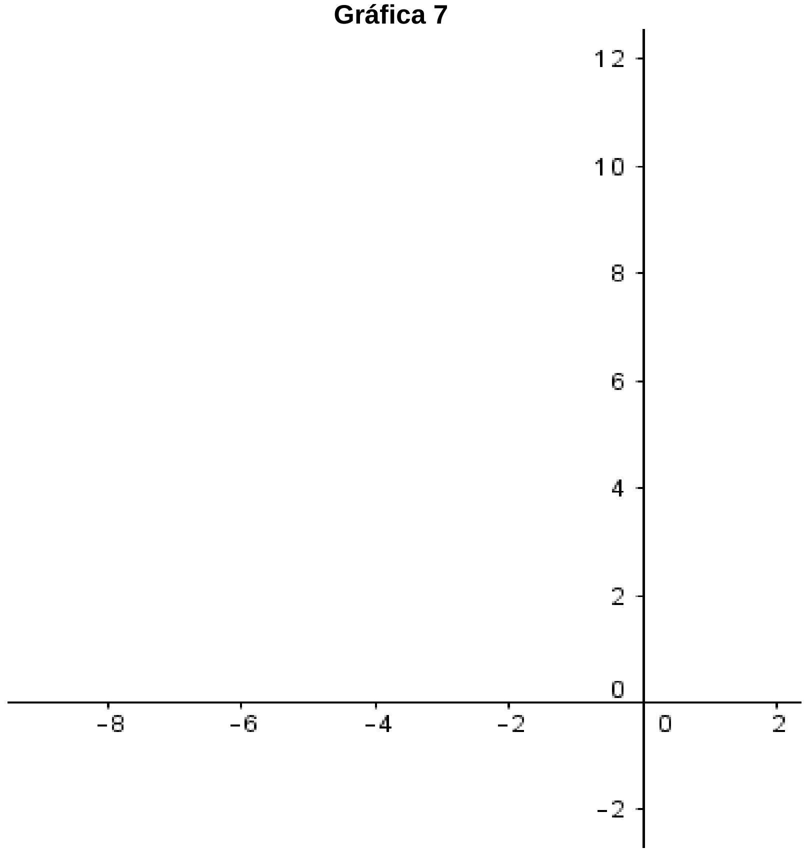
Ejemplo 8. Dibuja la función f(**x**) = $\mathbf{x}^2 + 8\mathbf{x} + 21$ en la gráfica 7. Indica en cuantos puntos se interseca con el eje X y en qué puntos.

Solución. Para que traces la gráfica de f(**x**) auxíliate construyendo la tabla 7.

Tabla 7

x	**y** = f(**x**)

Gráfica 7



Si después de reflexionar no tienes una idea clara de cómo establecer en la tabla los valores de la variable independiente **x** que te permitan hacer el trazo de la gráfica con bastante seguridad, observa que los ejemplos 4, 5 y 7 te proporcionan una estrategia. Si en la función f(**x**) = $\mathbf{x}^2 + 8\mathbf{x} + 21$ completas $\mathbf{x}^2 + 8\mathbf{x}$ a un trinomio cuadrado perfecto sumando y restando el número adecuado que en este caso es 16, así obtienes f(**x**) = $\mathbf{x}^2 + 8\mathbf{x} + 16 - 16 + 21$, que al factorizar se tiene:

$$f(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} + 4)^2 + 5.$$

Para obtener el valor de **x** que corresponde a la abscisa del vértice razonamos igual que en el ejemplo 4, es decir, el valor más pequeño de **y** es cuando $(\mathbf{x} + 4)^2$ vale cero, o sea en **x** = -4; éste es el valor de **x** que debes colocar en el renglón intermedio de la tabla. Con ello puedes escribir dos valores de **x** menores como, por ejemplo, -8 y -6 y los dos mayores -2 y 0 de tal forma que queden ***simétricos***, para llenar la tabla y así obtener fácilmente la gráfica deseada. Por otra parte como f(-4) = 5, significa que **y** = 5 es el valor más pequeño de **y**, por tanto las coordenadas del vértice son V(-4 , 5).

Ejemplo 9. Obtén las coordenadas del vértice de las funciones que están en las tablas 8 y con base en ello construye la tabla correspondiente y dibújalas en la gráfica 8.

Solución.
El vértice de la primera función es V(__ , __) ; de la segunda es V(__ , __) y de la tercera es V(__,__)

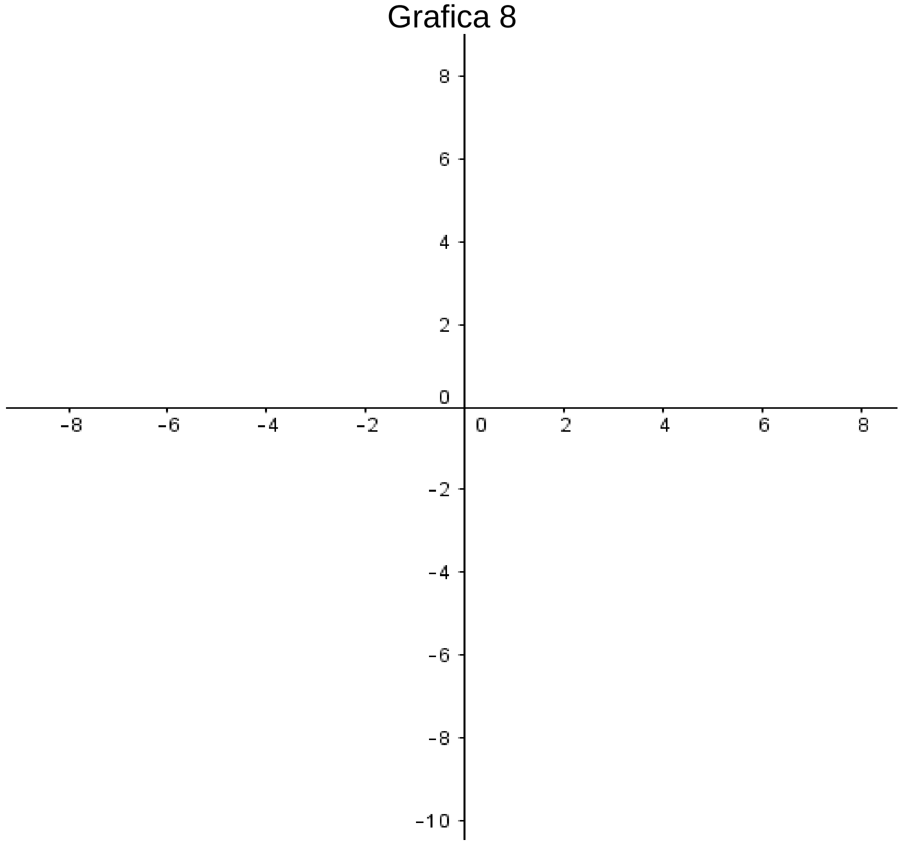
Tablas 8

x	$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^2+4\mathbf{x}-4$

x	$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^2-5\mathbf{x}+4$

x	$f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^2-6\mathbf{x}$

Grafica 8



Pasemos a graficar funciones cuadráticas con $a \neq 1$

Ejemplo 10. Grafica la función $f(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}^2 + 12\mathbf{x} + 3$.

Solución.
Es necesario que primero factorices el valor de $a = 2$ de la siguiente manera:
$f(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x}^2 + 6\mathbf{x}) + 3$ y completando el trinomio cuadrado perfecto dentro del paréntesis de agrupamiento queda, $f(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x}^2 + 6\mathbf{x} + 9) - 18 + 3$; observa que en esta función en total no se ha sumado 9 sino 18 porque hay un 2 factorizado, o sea que el 9 que se sumó dentro del paréntesis está multiplicado por 2, por eso se restó 18. Así la función queda:

$$f(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x} + 3)^2 - 15$$

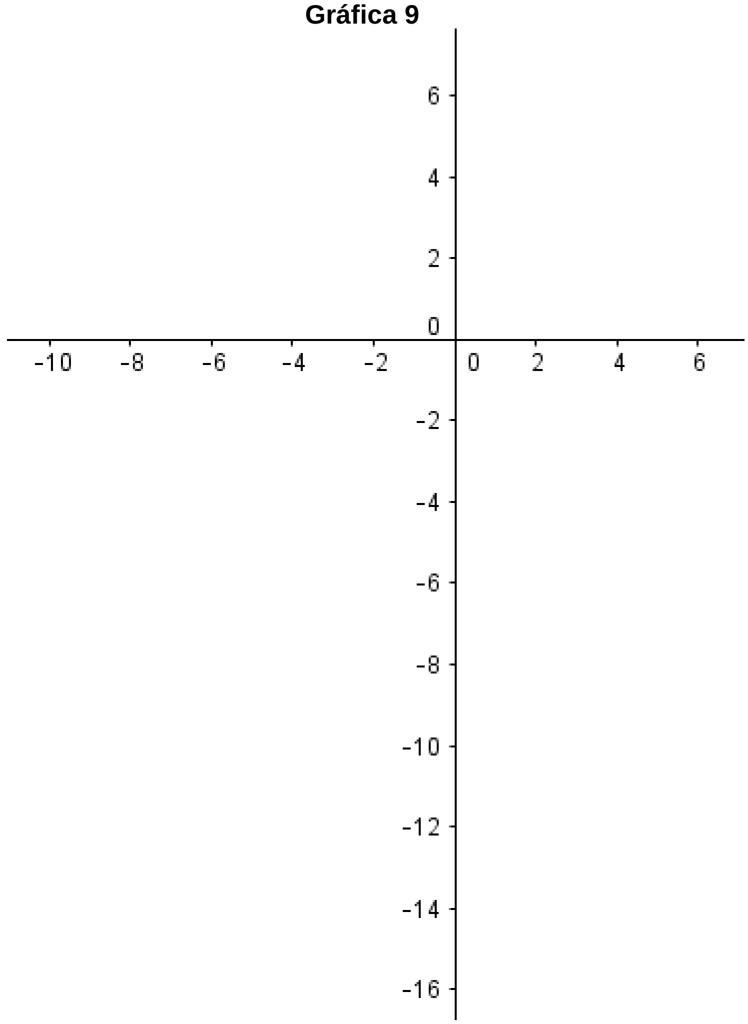
y con los mismos argumentos de los ejemplos 4 y 8 se tiene que el vértice es:
V(-3 , -15), con esto ya puedes colocar -3 en el renglón intermedio de la tabla. Determina las intersecciones de la gráfica con el eje X.

Construye la tabla 9 para que dibujes la función en la gráfica 9.

Tabla 9

x	**y** = f(**x**)

Gráfica 9



Ejemplo 11. Igual que en el ejemplo anterior, determina las coordenadas del vértice para las funciones indicadas en las tablas 10, llénalas y dibújalas en la gráfica 10.

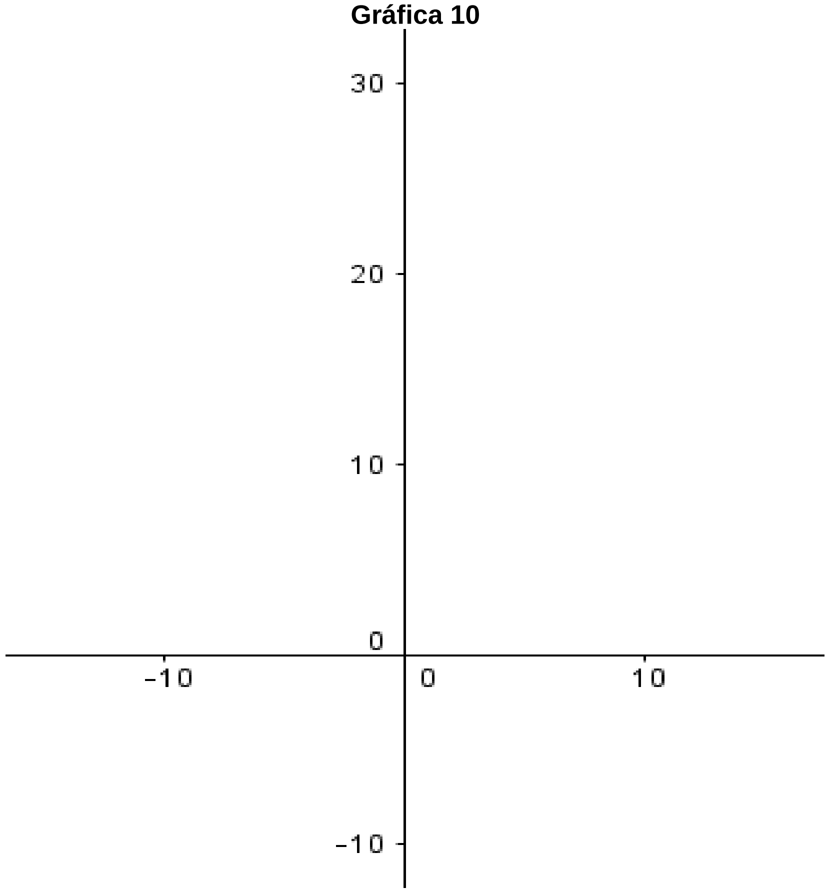
Solución.
El vértice de la primera función es V(__ , __) y para la segunda es V(__ , __).

Tablas 10

x	$f(\mathbf{x})=3\mathbf{x}^2+36\mathbf{x}+104$

x	$f(\mathbf{x})=4\mathbf{x}^2-32\mathbf{x}+68$

Gráfica 10



Finalmente grafiquemos funciones cuadráticas con “a” negativo (a < 0).

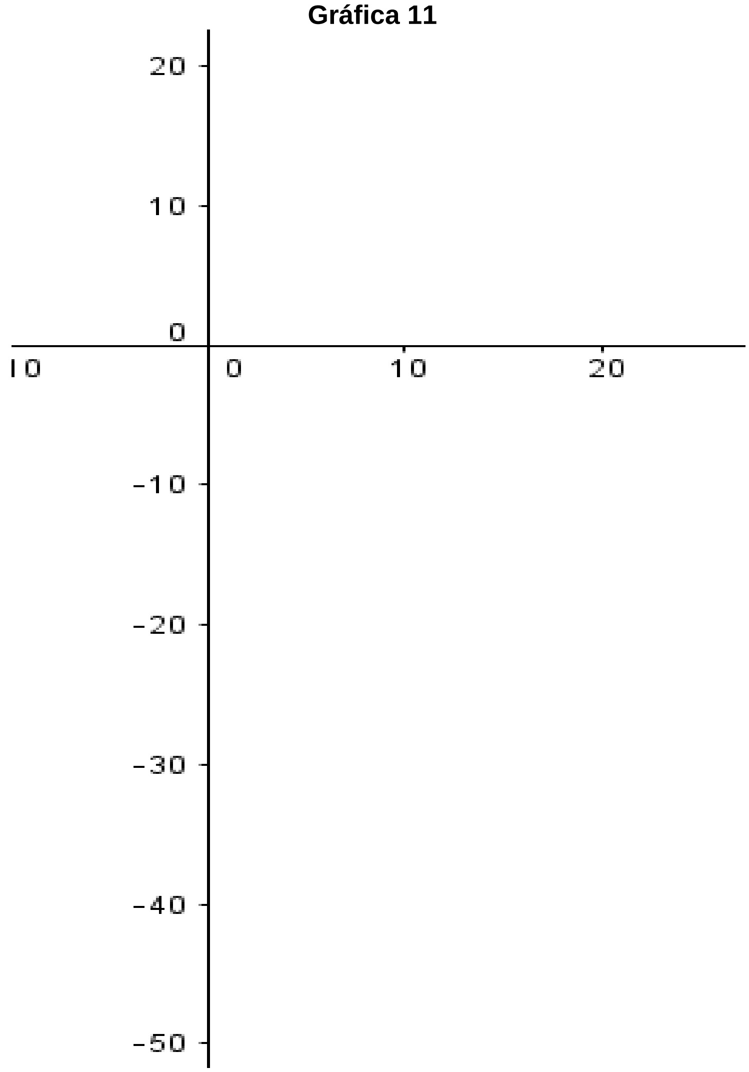
Ejemplo 12. Graficar la función f(**x**) = -**x**^{2} + 12**x** – 20 en la gráfica 11.

Solución.
Para llenar la tabla 11 primero debes calcular la abscisa **x** del vértice; inténtalo para ver si lo puedes hacer por cuenta propia, después se da una explicación.

Tabla 11

x	**y** = f(**x**)

Gráfica 11



Como a = -1, se inicia al factorizar de la siguiente manera f(**x**) = -(**x**^{2} - 12**x**) - 20, después completamos el binomio dentro del paréntesis a un trinomio cuadrado perfecto y así obtenemos f(**x**) = -(**x**^{2} - 12**x** + 36) + 36 - 20, observa que fuera del paréntesis sumamos 36 porque de hecho con el signo negativo que se factorizó hemos restado 36 para completar el trinomio, así tenemos f(**x**) = -(**x** - 6)^2 + 16.

La expresión algebraica -(**x** - 6)^2 en esta función nunca va a ser positiva (por el signo menos que está fuera del paréntesis), así que el valor más grande que va a tomar es cero, el cual se obtiene con **x** = 6 (cualquier otro valor es negativo, por ello la parábola abre hacia abajo), por lo que la abscisa del vértice es **x** = 6, con el cual puedes empezar a llenar la tabla (por cierto el vértice es V(6 , 16)). Termina de llenar la tabla 11 con los valores 2, 4, 6 y 10 de la variable independiente **x** y dibújala en la gráfica 11.

Ejemplo 13. Grafica la función f(**x**) = -4$\mathbf{x}^2$ + 48**x** -128 usando la tabla 12 y la gráfica 11.

Solución.
Comencemos factorizando, -4 de la siguiente forma f(**x**) = -4($\mathbf{x}^2$ + 12**x**) – 128, ahora procede tú de igual manera que en el ejemplo anterior hasta que traces la gráfica (puedes usar los mismos valores de **x** de la tabla anterior).

Tabla 12

x					
y					

Ejemplo 14. Dibuja sobre la gráfica 11 las funciones contenidas en las tablas 13.

Solución.
Llena adecuadamente las tablas 13 para que las dibujes en la gráfica 9.

Tablas 13

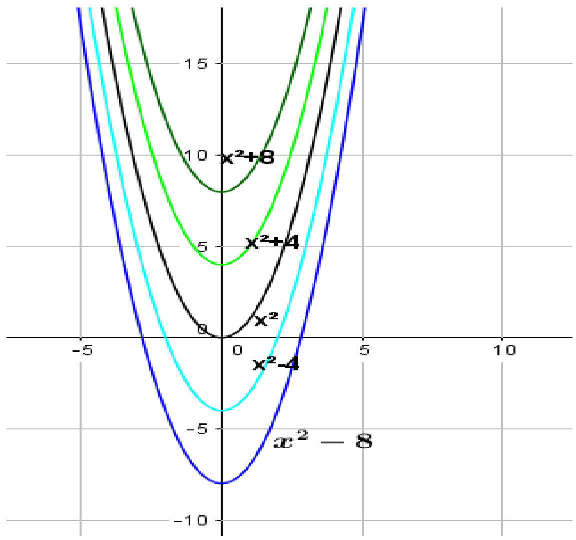
x	f(**x**)=-2$\mathbf{x}^2$+24**x**-56

x	f(**x**)=-3$\mathbf{x}^2$+36**x**-92

SÍNTESIS DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Con los ejemplos 1, 5, y 7 hemos visto que, si dejamos fijos los parámetros "a" y "b" de la función cuadrática y le damos variación al parámetro "c", entonces desplazamos la gráfica de f(**x**) sobre la línea vertical que pasa por el vértice de la parábola; es hacia arriba cuando aumenta el valor de "c" y la movemos hacia abajo cuando "c" disminuye.

Figura 1b



Las funciones del ejemplo 1, mantienen los valores de a=1 y b=0

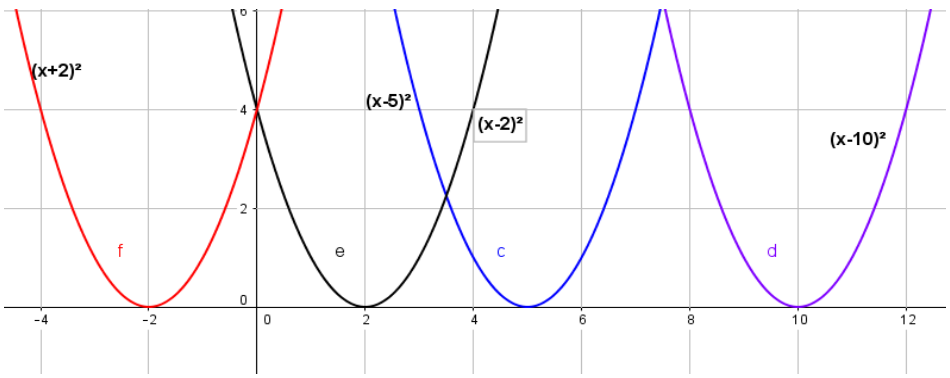
Podemos observar en las gráficas el efecto que hace la constante "c" con respecto a la función $f(x)=x^2$

Si c>0 la gráfica sube

Si c<0 la gráfica baja

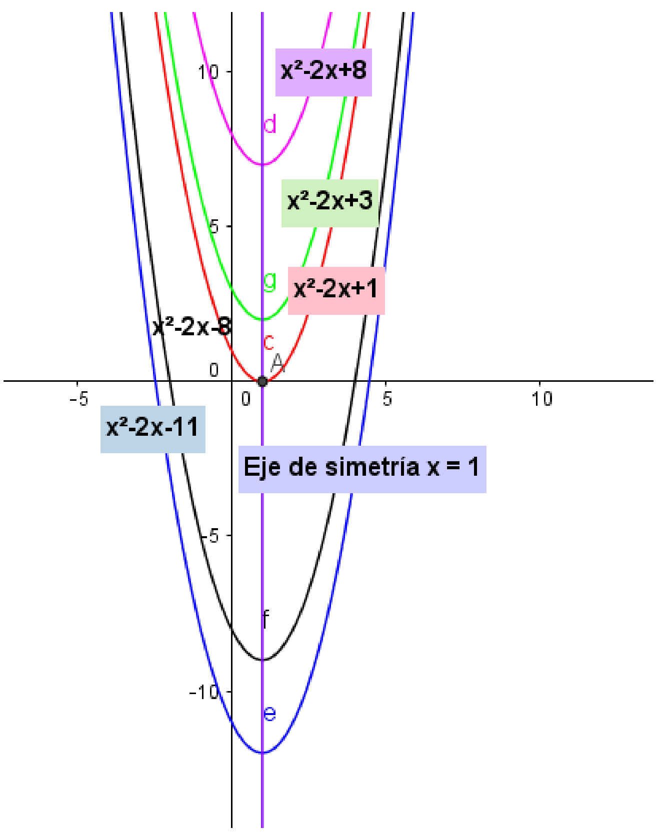
En el caso del **ejemplo 5**, son funciones que se pueden factorizar como un binomio al cuadrado.
Este hecho nos permite observar que el vértice se encuentra sobre el eje X como lo muestran las gráficas.
También podemos de forma inmediata determinar las coordenadas del Vértice:
El valor lo determinamos en cada caso cuando la variable **x** toma el valor que al operar en la expresión el resultado es cero, por ejemplo:
Para $(x+2)^2$ si tomamos x=-2 al sustituir queda $(-2+2)^2= (0)^2=0$ de ahí que V(-2,0)

Figura 2b



Para el **ejemplo 6 y 7**

Figura 3b



Las gráficas del ejemplo 7, nos permiten observar lo siguiente:

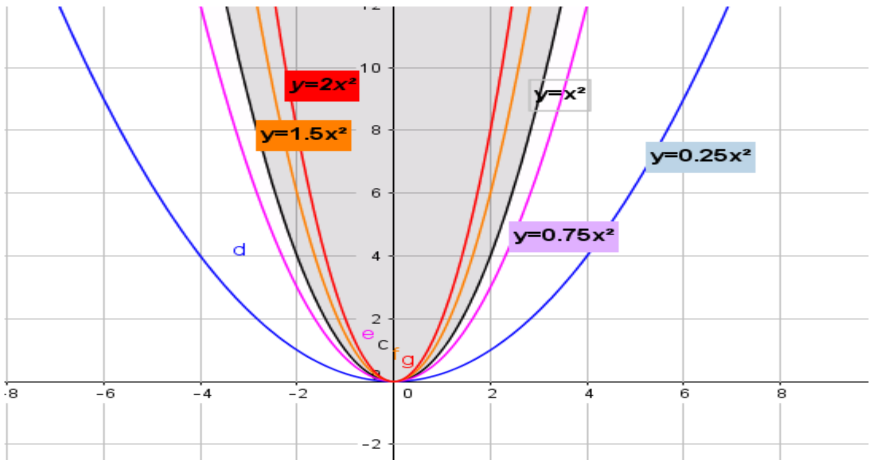
El valor de a=1 y b=-2 se mantienen constantes en todas las funciones.
¿Cuál es el efecto de “a=1” en las gráficas?
Podemos observar que la abertura se mantiene en todas las gráficas.

¿Cuál es el efecto de “b=-2” en las gráficas?
Podemos observar que todas las parábolas tienen su vértice sobre la recta x=1, siendo esta recta el “eje de simetría”.

Con los **ejemplos 2 y 3** vimos que sí “a” es positivo la parábola, se abre hacia arriba y que, si “a” es negativo la parábola, se abre hacia abajo.

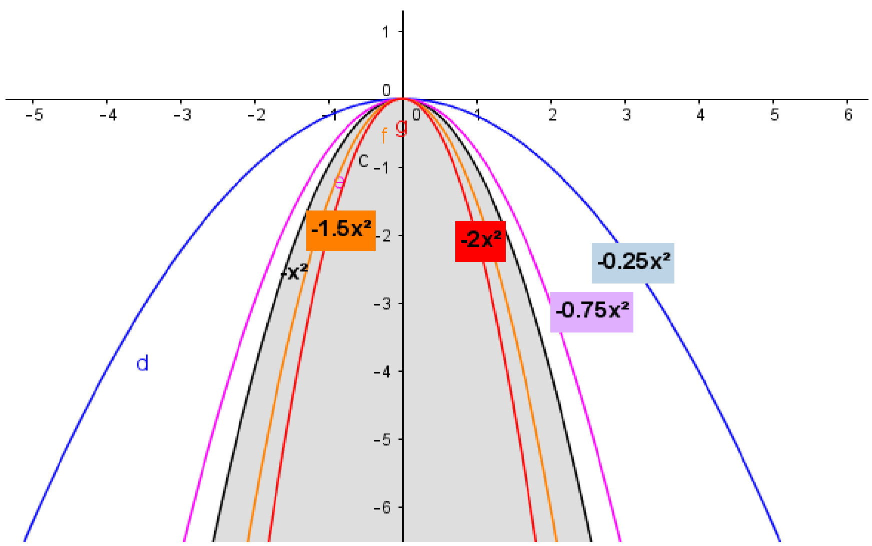
En el **ejemplo 2** vimos que sí “a” está entre 0 y 1 (0 < a < 1), la parábola se abre más que la correspondiente a, f(**x**) = **x**^{2}; y si “a” es mayor que 1 (a >1), la parábola se cierra más que la de f(**x**) = **x**^{2}. Como lo muestran las parábolas de la siguiente figura.

Figura 4b



Para el **ejemplo 3**, tenemos las siguientes gráficas y puedes observar lo siguiente:
En el ejemplo 2 vimos que sí “a” está entre 0 y 1 (0 < a < 1), la parábola se abre más que la correspondiente a, f(**x**) = **x**^{2}; ahora esa misma situación se aplica para “a” entre -1 y 0 (-1<a<0) y si “a” es menor que -1 (a <-1), la parábola se cierra más que la de f(**x**) = **x**^{2}. Como se muestra en la siguiente figura.

Figura 5b



Además, nos dimos cuenta de que cuando el coeficiente “a” es:

Positivo la parábola abre hacia arriba (es cóncava hacia arriba)

y

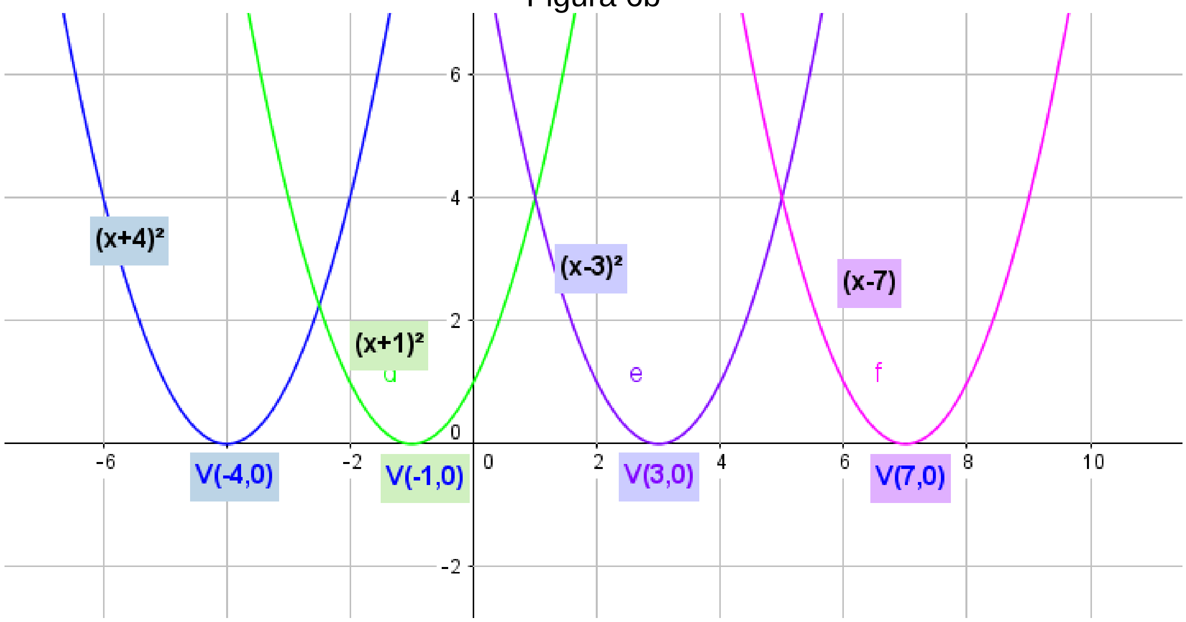
Negativo la parábola abre hacia abajo (es cóncava hacia abajo)

Así que los significados de abrir o cerrar hacia arriba o hacia abajo en una parábola se conceptualizan con dos nociones: ***CONCAVIDAD***, como se muestra en la región sombreada de las funciones **f(x)=x²** y **f(x)=-x²** de las figuras 4b y 5b que encierra la parábola y ***CONVEXIDAD***, que define la parte exterior a la parábola.

Aplicando los nuevos conceptos, reformulamos los significados que acabamos de ver: si el parámetro "a" es positivo, la parábola es cóncava hacia arriba, y es cóncava hacia abajo si "a" es negativo. También decimos que sí "a" está entre 0 y 1 (0 < a < 1), la parábola es **más** cóncava que f(**x**) = **x**^{2} y que es **menos** cóncava si "a" mayor que 1 (a >1).

El **ejemplo 4** nos ilustra que si f(**x**) = a**x**^{2} + b**x** + c, es un trinomio cuadrado perfecto entonces, el vértice de la parábola se encuentra sobre el eje **X** (eje de las abscisas).

Figura 6b

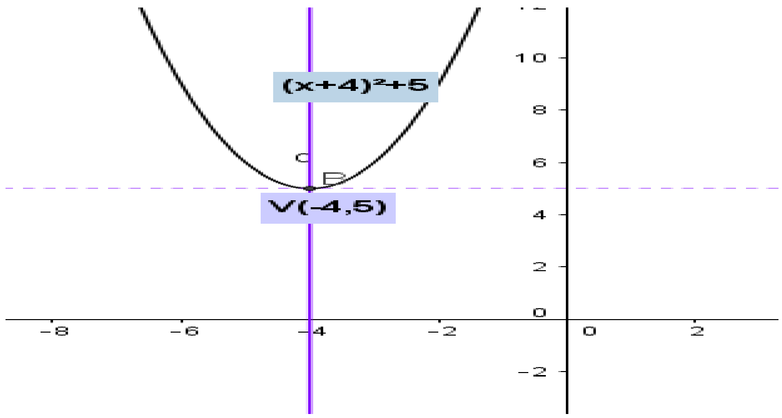


En el **ejemplo 8** ya podemos aplicar todo lo visto en los ejemplos anteriores, así que:

$$f(x) = x^2 + 8x + 21 = (x+4)^2 + 5$$

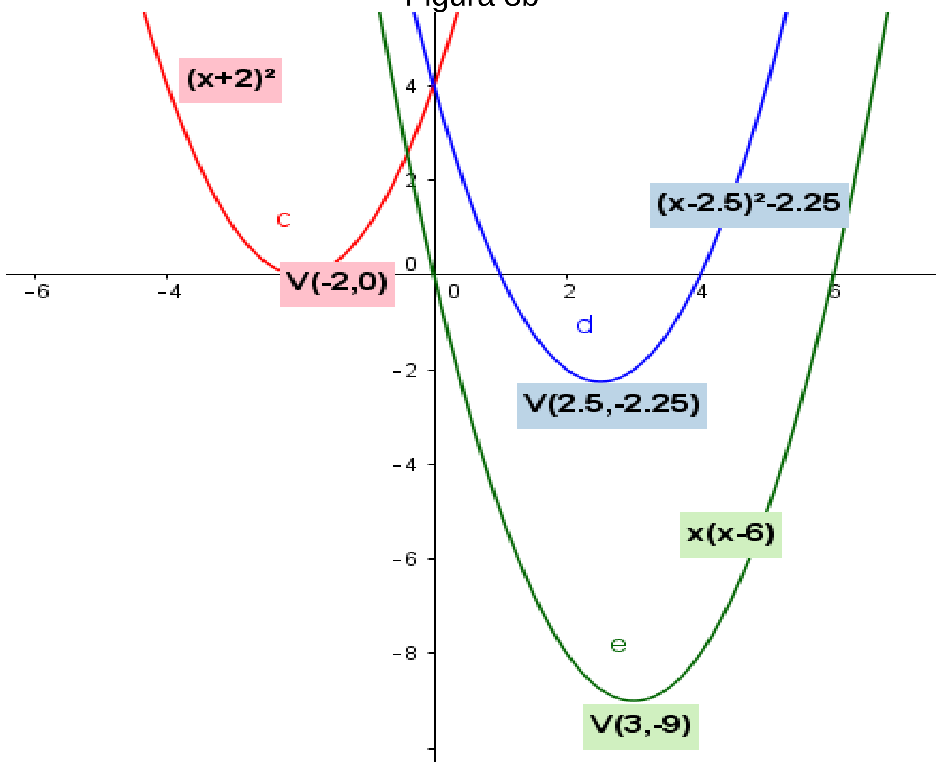
Con esto concluimos que la parábola abre hacia arriba (a=1>0) y del ejemplo 4 y 1, se tiene que el vértice tiene coordenadas V(-4,5) como se muestra en la figura.

Figura 7b



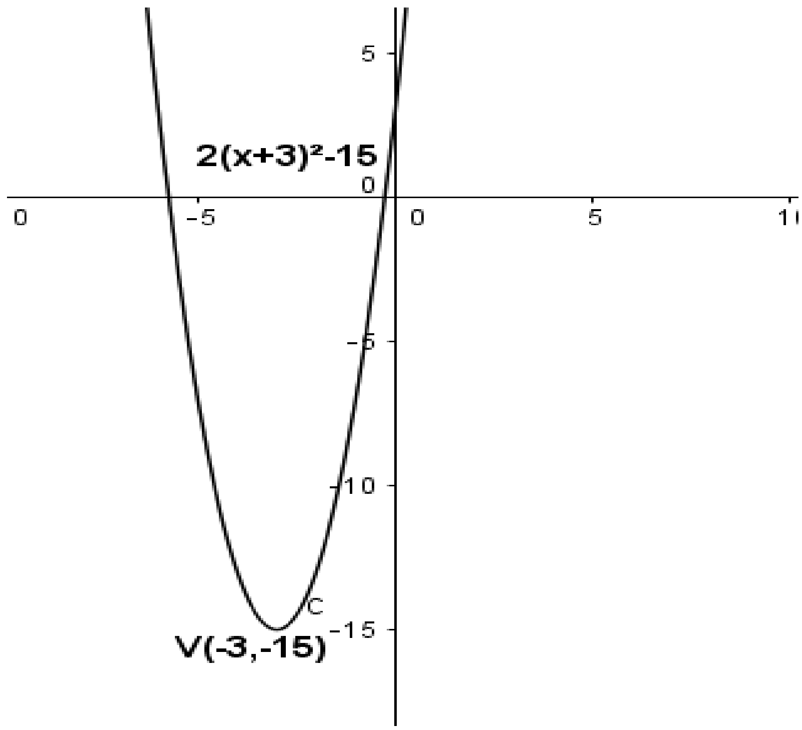
En el **ejemplo 9** también ya podemos aplicar todo lo visto en los ejemplos anteriores:

Figura 8b



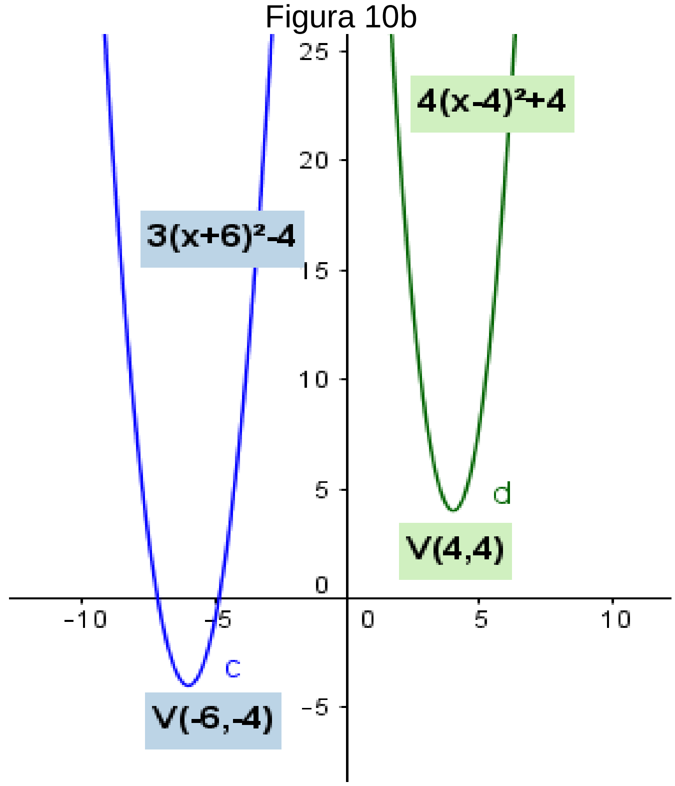
Para el **ejemplo 10** se tiene:

Figura 9b



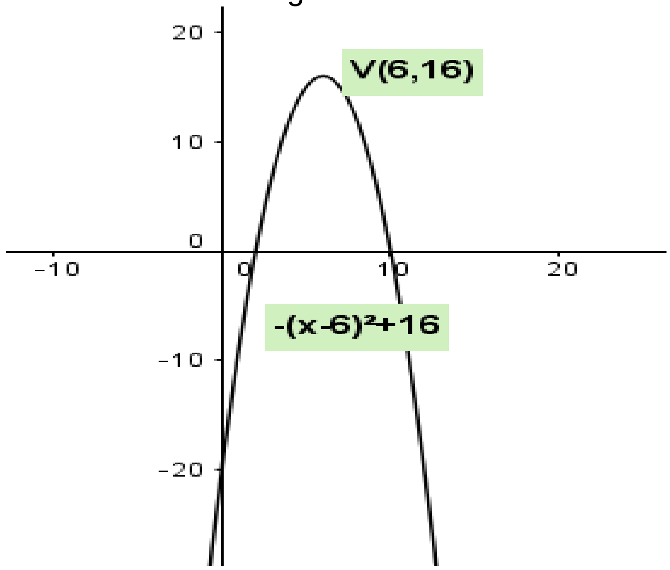
Para el **ejemplo 11** se tiene:

Figura 10b



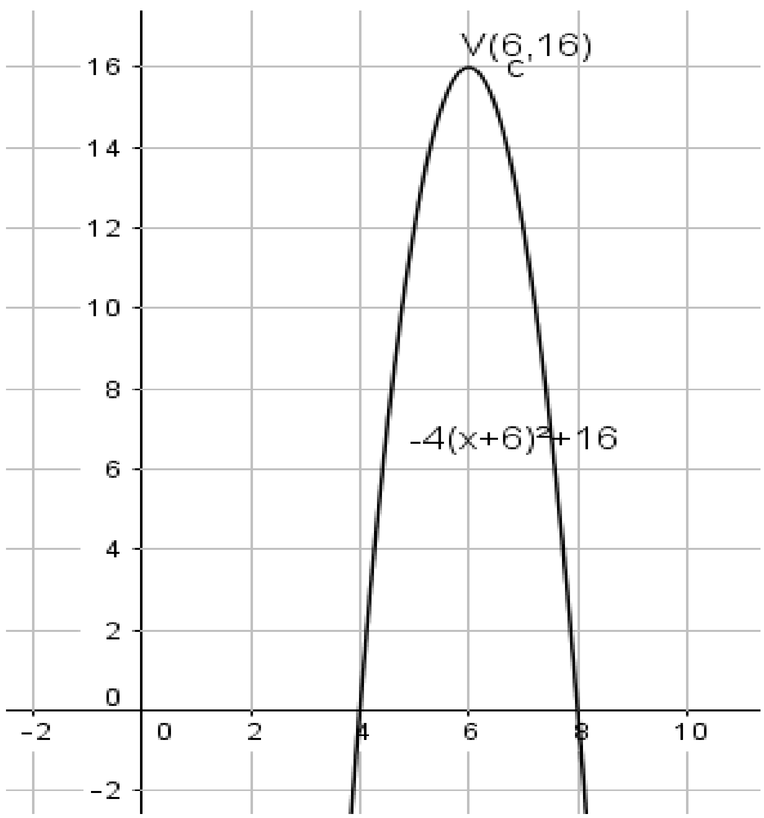
Para el **ejemplo 12** y los restantes, se tiene que el valor de “a” es negativa (a<0): Lo que significa que abre hacia abajo.

Figura 11b



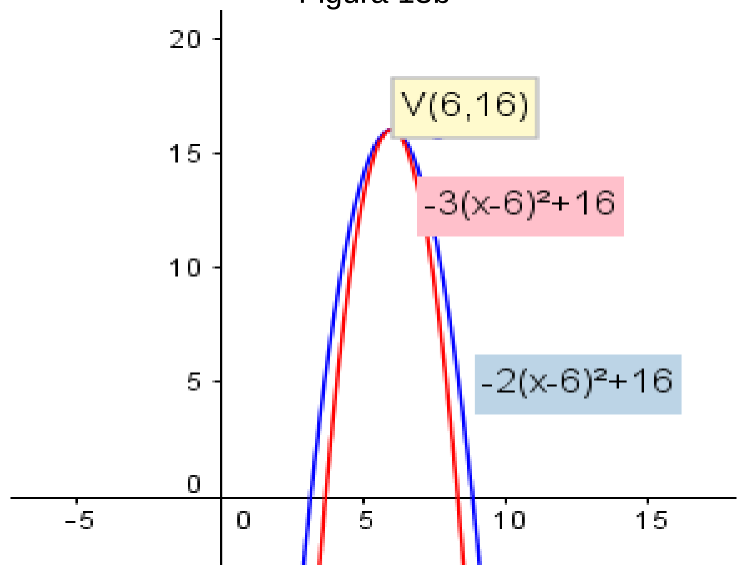
Para el **ejemplo 13** se tiene:

Figura 12b



Para el **ejemplo 14** se tiene:

Figura 13b



De los ejemplos 8 al 14 se desprende que si en f(**x**) = a**x**^{2} + b**x** + c completamos a un trinomio cuadrado perfecto expresándolo en la forma f(**x**) = a(**x** + **h**)^2 + **k**, el vértice de la parábola es V(**h** , **k**), lo que nos permite simplificar la gráfica de la función.

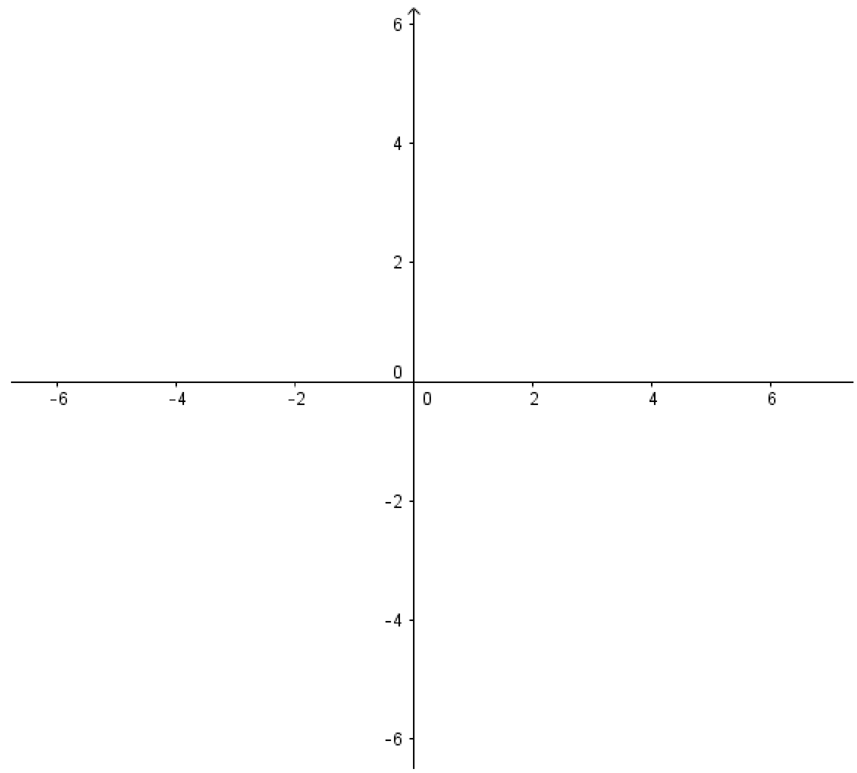
La gráfica de toda función cuadrática tiene ***SIMETRÍA AXIAL***, lo que significa que su eje de simetría es la línea recta vertical que pasa por el vértice, dividiendo a la parábola en dos partes que se reflejan como si el eje de simetría fuera un espejo, como se muestra en la figura 3b.

Ejercicios

1. Aplicando los conceptos de esta acción, elabora las gráficas de cada una de las siguientes funciones.
   a) $f(x) = 3x^2$
   b) $f(x) = 7x^2$
   c) $f(x) = -3x^2$
   d) $f(x) = -7x^2$
   e) $f(x) = 0.5x^2$
   f) $f(x) = \frac{3}{4}x^2$
   g) $f(x) = -\frac{x^2}{2}$
   h) $f(x) = -0.75x^2$

En el siguiente eje de coordenada grafica las funciones y contesta cada una de las preguntas.

Gráfica 1



¿Cómo explicas que las parábolas abran hacia arriba? ________________________
¿Cómo explicas que las parábolas abran hacia abajo? ________________________

¿Cómo explicas que el coeficiente “a” sea un valor entre 0 y 1 (0<a<1) para las parábolas?
____

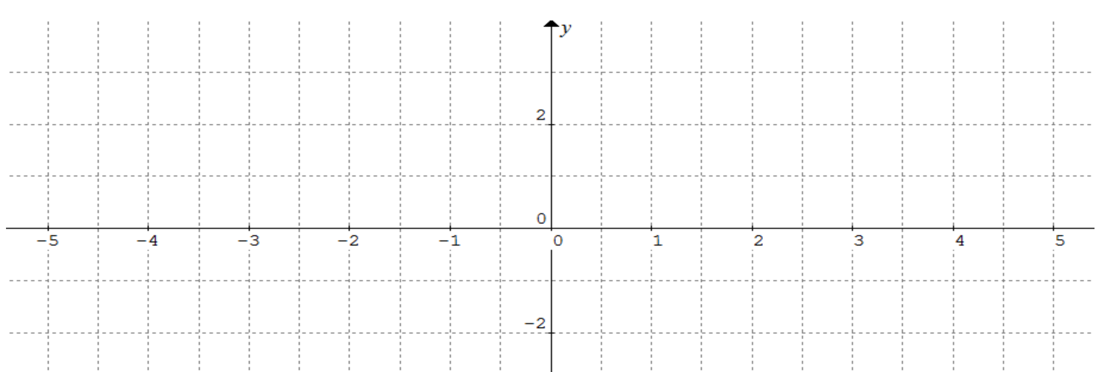
¿Cómo explicas que el coeficiente “a” sea un valor mayor que 1 (a>1) para las parábolas?
____

2. Si en la función cuadrática le agregamos el término lineal bx su forma será la siguiente

$$f(x) = ax^2 + bx$$

en donde si $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba y posee un mínimo, pero si $a < 0$ entonces la parábola es cóncava hacia abajo y posee un máximo.
Con diferente color elabora las gráficas de cada una de las siguientes funciones cuadráticas en el mismo plano.

a) $f(x) = x^2 + 0.5x$
b) $f(x) = x^2 + 2x$
c) $f(x) = x^2 + 5x$
d) $f(x) = x^2 - 0.75x$
e) $f(x) = x^2 - 3x$
f) $f(x) = x^2 - 5x$

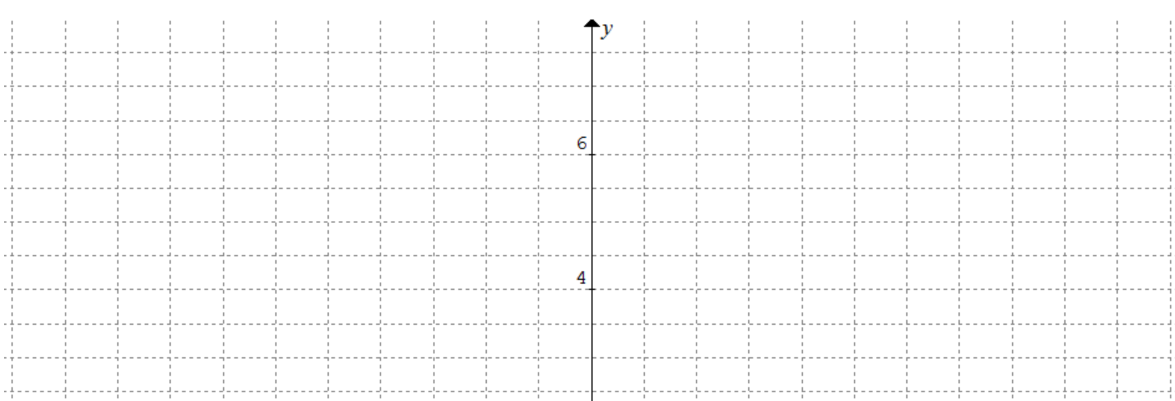


Comenta lo que observas, si $b > 0$.
¿Cómo es el desplazamiento de las parábolas?

Comenta lo que observas, si $b < 0$.
¿Cómo es el desplazamiento de las parábolas?

También podemos comentar que en ambas situaciones a medida que el valor absoluto de b, (que se representa de la siguiente manera $|b|$ y significa que:
$|b| = \begin{Bmatrix} b & si\ b > 0 \\ -b & si\ b < 0 \end{Bmatrix}$) aumenta la ordenada del vértice de la parábola se hace más negativa.
Se puede observar que todas parábolas tienen un punto en común el punto (0,0).

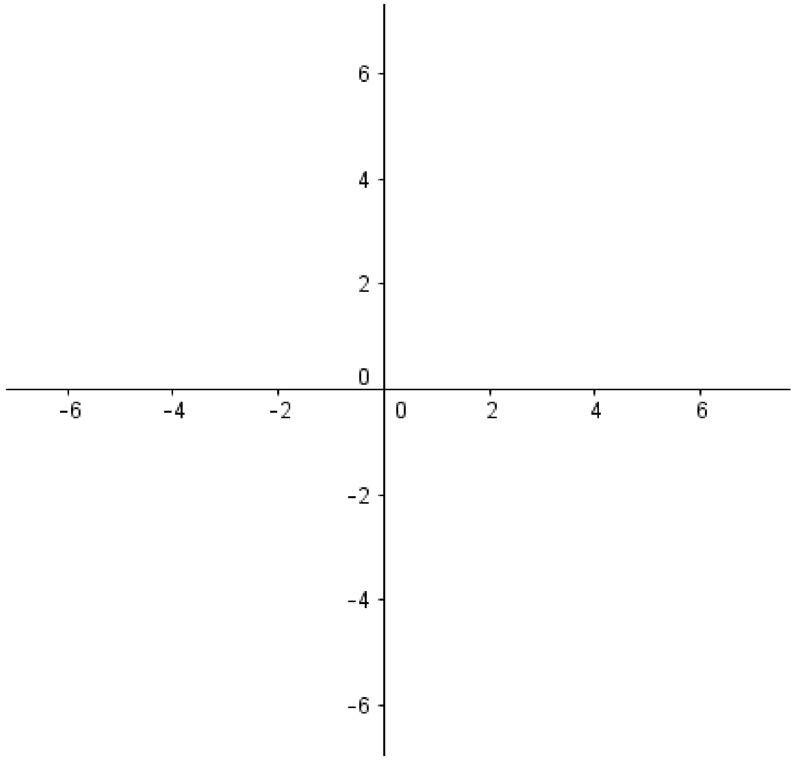
3. Grafica cada una de las siguientes funciones cuadráticas en el mismo plano cartesiano.
   a) $f(x) = 2x^2 + x - 1$
   b) $f(x) = 2x^2 + x + 2$
   c) $f(x) = 2x^2 + x + 5$



Comenta lo que observas en las gráficas con respecto al parámetro “c”:

Sombrea la ***CONVEXIDAD*** de la parábola de inciso a.

4. Grafica cada una de las siguientes funciones cuadráticas en el mismo plano cartesiano.
   a) $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$
   b) $f(x) = x^2 - 2x - 2$
   c) $f(x) = -2x^2 + x + 5$



¿Qué parábolas abren hacia arriba, que lo justifica?

____

¿Cuáles son las coordenadas del vértice de cada parábola?

____

Traza el eje de simetría de cada parábola.
Sombrea la concavidad de las parábolas.

5. Elabora un resumen de los conceptos estudiados en esta acción.
   a) ¿Que de todos los aspectos que estudiamos te ha sorprendido más?
   b) ¿Cuál de todos los significados te costó más trabajo su comprensión?

FIN DE LA ACCIÓN

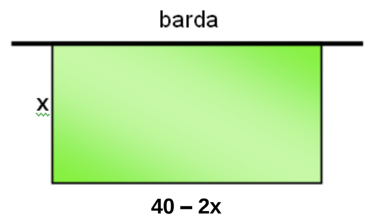
ACCIÓN 3

PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN CON FUNCIONES CUADRÁTICAS

Objetivo: el estudiante debe aprender a resolver problemas de máximos y mínimos aprovechando las propiedades de la función cuadrática.

> **AL ESTUDIANTE:** verás aquí el poder que tiene la teoría al resolver problemas de optimización (con máximos y mínimos) sin hacer uso de tablas o gráficas, al modelar con funciones cuadráticas situaciones relacionadas con ejemplos relativos a diferentes disciplinas.

Ejemplo 1. En el ejemplo 2 de la acción 1 tratamos el siguiente problema. Para sus estudios experimentales en botánica un grupo de estudiantes va a cercar un terreno rectangular utilizando como uno de sus lados la barda existente en la parte trasera del plantel y cuentan para ello con 40 m de reja. ¿Cuáles son las dimensiones del terreno que dan la mayor área?, y ¿cuánto vale esta área máxima?

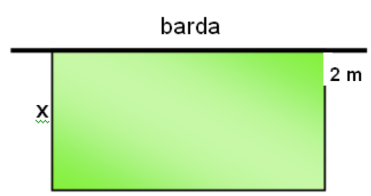


Solución. Sabemos que si varía el ancho y el largo del terreno también varía su área, por eso estudiamos la función cuadrática entre la variable independiente **x** = “longitud de los lados perpendiculares a la barda” (como se muestra en la figura) y la variable dependiente **y** = f(**x**) = “área del terreno cercado” para determinar las dimensiones del terreno que proporcionen la mayor área y aprovechar así al máximo el terreno. Para construir esta función observa que se consumen 2**x** de metros de reja en los lados perpendiculares a la barda, luego sobran 40 – 2**x** de metros para cercar el lado paralelo a la barda (ver figura); por tanto la función área es $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}(40 - 2\mathbf{x})$ o sea $f(\mathbf{x}) = -2\mathbf{x}^2 + 40\mathbf{x}$ y como a = -2 sabemos que la gráfica es una parábola que se abre hacia abajo, luego el vértice contiene el valor de **x** al cual le corresponde la **y** máxima. Procedamos entonces a la factorización y a completar el trinomio cuadrado perfecto para calcular las coordenadas del vértice.

$$f(\mathbf{x}) = -2\mathbf{x}^2 + 40\mathbf{x} = -2(\mathbf{x}^2 - 20\mathbf{x}) = -2(\mathbf{x}^2 - 20\mathbf{x} + 100) + 200 = -2(\mathbf{x} - 10)^2 + 200$$

Como ya se vio en la acción anterior, las coordenadas del vértice son V(10 , 200). De esto se desprende que las dimensiones del terreno que corresponden al área máxima son **x** =10 m en los lados perpendiculares a la barda y 40 -2**x** = 20 en el lado paralelo a la barda, además **y** = 200 es la mayor área que se puede cercar.

Ejemplo 2. En relación con el problema anterior el grupo de alumnos decide dejar un acceso libre de 2 m sin reja como se muestra en la figura, determina las dimensiones del terreno que corresponden a la mayor área y calcula dicha área.

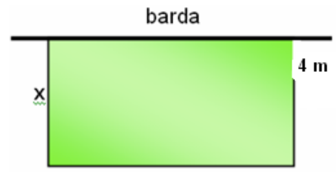


Solución. Para que resuelvas el problema construye la función cuadrática que modela esta situación y con las coordenadas del vértice responde lo que se pide.

Las dimensiones del terreno son: ancho _____, largo _____, el área máxima es _____.

Del ejemplo anterior ahora con esta variante, para el área máxima, ¿cuánto vale el incremento en la variable independiente $\Delta \mathbf{x}$ = __? y ¿cuánto aumentó el área, es decir la variable dependiente $\Delta \mathbf{y} = \Delta f(\mathbf{x})$ = _______?

Ejemplo 3. Igual que en el ejemplo anterior determina las dimensiones del terreno que tiene área máxima si ahora el espacio libre para el acceso es de 4 m.

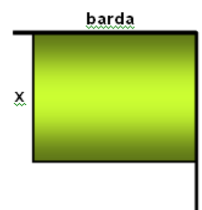


Solución. Con base en las coordenadas del vértice de la gráfica de la función cuadrática que modela este problema, responde:

Las dimensiones del terreno de mayor área son: ancho _____, largo _____, el área máxima es _____.

Entre más grande es el acceso hay más aumento en el perímetro. Del ejemplo 2 al 3 para el área máxima, ¿cuánto vale el incremento en la variable independiente $\Delta \mathbf{x}$ = _______? y ¿cuánto aumentó el área, es decir la variable dependiente $\Delta \mathbf{y} = \Delta f(\mathbf{x})$ = _______?

Ejemplo 4. Si el terreno se debe construir en la esquina del plantel en donde hay dos bardas, por lo que hay que cercar únicamente dos lados, con los mismos 40 m de reja ¿cuáles son las dimensiones del terreno de mayor área?, y ¿cuánto vale esta área?



Solución. Construye la función cuadrática que modela esta situación y con las coordenadas del vértice responde las anteriores preguntas.

Las dimensiones del terreno de mayor área son: ancho _____, largo _____, el área máxima es _____.

Ejemplo 5. Ahora resuelve el problema anterior si se dejan 2 m libres para el acceso.

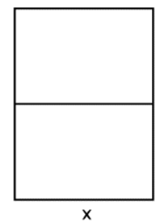
Solución.

Las dimensiones del terreno de mayor área son: ancho _____, largo _____, el área máxima es _____.

Ejemplo 6. Resuelve el problema anterior si son 4 m libres para el acceso.
Solución.

Las dimensiones del terreno de mayor área son: ancho _____, largo _____, el área máxima es _____.

Ejemplo 7. Para separar a los animales un veterinario rural cuenta con 12 m de tela de alambre para cercar una porción rectangular para luego dividirla a la mitad como se muestra en la figura. Está estudiando cuál debe ser el ancho y el largo que le den la mayor área y también calcular cuánto vale dicha área.



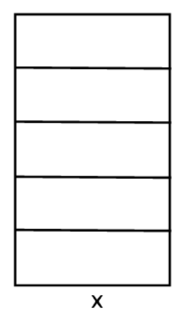
Solución. Para ayudarle a resolver el problema al veterinario observa que de los 12 metros gasta **3x** m en las divisiones. ¿Cuánto le queda para cada uno de los lados (el largo del rectángulo)? Construye la función cuadrática que dé el área del rectángulo mayor en función de la variable independiente **x** que se señala en el dibujo y, calculando las coordenadas del vértice, di cuál es la solución.

f(**x**) = ____________________

El vértice es V(__ , __)

El ancho del terreno de mayor área es ________, el largo es ________, el área máxima es ________.

Ejemplo 8. El veterinario del ejemplo anterior con 30 m de tela de alambre ahora va a encerrar cinco compartimientos rectangulares de igual tamaño como se ve en la figura. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo con mayor área que encierre a los cinco compartimentos?, ¿cuánto vale el área de cada uno de los cinco compartimientos?



Solución. Para resolver este problema construye en forma análoga al anterior la función cuadrática que modela el área del rectángulo grande que encierra a los demás rectángulos en función del ancho **x** que se muestra en la figura, ¿cuánto le queda de tela de alambre para los lados perpendiculares? Luego con las coordenadas del vértice resuelve la situación.

f(**x**) = ____________________

El vértice es V(__ , __)

Para el rectángulo grande, el de mayor área el ancho es ______, el largo es _______, el área máxima es ________. Para cada uno de los rectángulos que se forman las particiones el ancho es _______, el largo es _______, el área de cada rectángulo es _________.

AL ESTUDIANTE: ya viste que la ley del movimiento en caída libre es $\mathbf{d} = \frac{1}{2}\mathbf{gt^2}$ cuando el cuerpo es soltado, en este caso el objeto inicia su movimiento con velocidad cero, pero si es lanzado hacia arriba en forma vertical con una velocidad inicial $\mathbf{v_0}$, la función que describe el movimiento es $\mathbf{d} = \mathbf{v_0 t} - \frac{1}{2}\mathbf{gt^2}$ en donde **d** = 0 se fija en el lugar donde el objeto inició el movimiento. Esta ley de movimiento se aplica a los cuerpos que no están demasiado lejos de la superficie de la tierra, cualquiera que sea su tamaño y peso, con la condición de que la resistencia del aire sea despreciable. Veamos ahora ejemplos de caída libre que se lanzan hacia arriba en forma vertical.

Ejemplo 9. En el juego de beisbol el bateador le pega a la pelota y ésta sale disparada hacia arriba en dirección vertical con una velocidad de 30 m/seg. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?, y ¿cuánto tiempo tarda su trayectoria para ser atrapada por el cátcher?

Solución. Aproximando el valor de g = 10 m/seg^2, la ley del movimiento que describe la pelota es d(**t**) = $-5\mathbf{t}^2 + 30\mathbf{t}$. La solución de este problema la obtenemos con las coordenadas del vértice de la parábola que describe la función y como a = –5, empezamos factorizando este valor d(**t**) = $-5(\mathbf{t}^2 - 6\mathbf{t})$, luego completa el trinomio cuadrado perfecto dentro del paréntesis de agrupamiento (aunque hay que sumar y restar la misma cantidad para que la función no sufra alteraciones). Escribe estas operaciones d(**t**) = ____________.

Las coordenadas del vértice son V(__ , __), por tanto la altura máxima que alcanza la pelota es ______ m.

El tiempo que tarda la pelota en alcanzar la máxima altura es el mismo que hace en regresar, entonces cuánto tiempo tarda la pelota en su trayectoria hasta que la atrapa el cátcher _______ seg.

Ejemplo 10. Unos juegos pirotécnicos son dispositivos (cohetes) diseñados para ser lanzados verticalmente hacia arriba y cuando alcanzan su máxima altura explotan generado flamas y luces de colores. Si uno de estos fuegos artificiales es lanzado con una velocidad de 60 m/seg, ¿a qué altura se verán las luces de colores? ¿Cuánto tiempo tardará en hacer la explosión después de que se lanzó?

Solución. En analogía con la solución del problema anterior razona y resuélvelo:

El modelo matemático que describe el movimiento es d(**t**) = ____________.

Las coordenadas del vértice son V(__ , __), por tanto la altura a la que se hará la explosión es a los ______ m. A partir de que se lanza el cohete el tiempo en que se verán las luces es de ______ seg.

Ejemplo 11. La función cuadrática f(**x**) = $-5\mathbf{x}^2 + 120\mathbf{x}$ es la ley de movimiento de un proyectil que se disparó desde el suelo en dirección vertical. Contesta lo siguiente:

a) ¿Cuál es la máxima altura que alcanzó el proyectil?

b) ¿Cuánto tiempo tardó en alcanzar la altura máxima?

c) ¿Cuánto tiempo le llevó en regresar al piso?

d) ¿A qué distancia del suelo se encontraba cuando llevaba 10 y 14 seg después de haber sido lanzado?

e) ¿Cuántos segundos le llevó al proyectil para estar a 575 m de altura? (Son dos las respuestas, explica por qué)

Ejemplo 12. Los estudios de mercado de una pequeña empresa de artículos perecederos muestran que f(**x**) = $-2\mathbf{x}^2 + 120\mathbf{x} - 800$ modela la ganancia diaria, en donde **x** es la cantidad de artículos que se producen diariamente. Contesta lo siguiente:

a) ¿Cuántos artículos deben producir diariamente para obtener la máxima ganancia?

b) ¿A cuánto asciende la ganancia máxima diaria que puede obtener la fábrica?

c) Por factores imponderables un martes sólo se produjeron 8 artículos, ¿de cuánto fue su ganancia en ese día?

d) Un determinado día se reportó una ganancia de $800, ¿cuántos artículos produjeron ese día? (Hay dos soluciones, explica por qué.)

Ejemplo 13. Debido a la crisis financiera que duró todo el año, una fábrica de automóviles va a hacer la gran venta de remate de fin de año de un modelo que casi no se vendió. A la fábrica le cuesta $40 fabricar cada uno y si los vende a $**x** estima vender 300 – 2**x** automóviles (el dinero está en miles de pesos y la cantidad de autos vendidos es neta). Contesta lo siguiente:

a) ¿En cuánto se debe fijar el precio de venta de cada auto para que la compañía obtenga la mayor utilidad bruta?

b) ¿De cuánto es el mayor ingreso bruto que espera obtener la compañía?

c) ¿A cuánto asciende la mayor ganancia neta que espera obtener la compañía?

d) ¿Cuánto dinero le costó producir lo que espera vender?

e) Si al precio que se fijó para obtener la mayor utilidad, sólo se vendieron 80 autos, ¿de cuánto fue su ganancia neta?

Ejemplo 14. Un profesor inicia su clase diciendo a sus alumnos que el primero que resuelva el siguiente problema tendrá dos puntos extras en el examen parcial. El problema dice así: encuentra dos números que sumadas den 106 y que el producto sea máximo. ¿Cuáles son esos números y cuánto vale el máximo producto?

Solución. Andrea comenzó resolviendo el problema razonando de la siguiente manera: sea **x** el primer número, entonces 106 - **x** es el segundo número. Continúa tú resolviendo el problema y contesta las preguntas del profesor.

Los dos números son ____, ____ y el máximo producto es ________.

Ejemplo 15. Obtén dos números cuya suma sea 27 y su producto sea máximo.

Solución.

Los dos números son ____, ____ y el valor del producto máximo es ________.

Ejemplo 16. Determina dos números que restados den como resultado 38 y que el producto sea mínimo.

Solución.

Los dos números son ____, ____ y el valor del producto mínimo es ________.

Ejemplo 17. Encuentra dos números positivos que sumados sea 44 y que la suma de sus cuadrados sea mínima.

Los dos números son ____, ____ y la suma de los cuadrados mínima es ________.

FIN DE LA ACCIÓN

EXAMEN DE AUTOEVALUACÓN.

1) Cual es la forma estándar de una función cuadrática.

2) Por el método de diferencias finitas analiza cual de las siguientes tablas representa una función cuadrática y cual no.

a)

x	y	…..	…..
-1	4		
0	-2		
1	-6		
2	-8		
3	-8		
4	-6		
5	-2		

b)

x	y	…..	…..
-1	-5		
0	-2		
1	1		
2	4		
3	7		
4	10		

c)

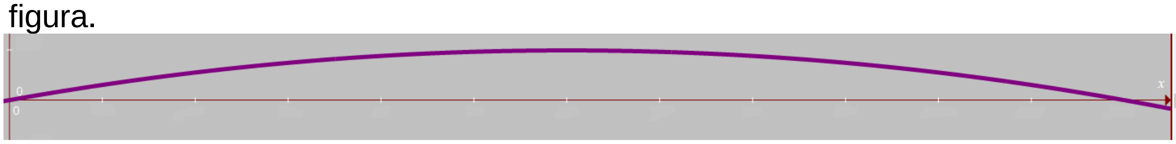
x	y	…..	…..
-1	0		
0	3		
1	4		
2	3		
3	0		
4	-5		

d)

X	Y	…..	…..
0	2		
1	-1		
2	-4		
3	-7		
4	-10		
5	-13		

3) Determina la función del inciso c)

4) En un estadio de futbol soquer se desea poner pasto sintético a la cancha y para el buen funcionamiento de drenado debe tener forma de parábola como se muestra en la figura.



Si la función que modela esta situación es **f(x)=- 0.000055x²+0.0066x** ¿Cuál es el largo de la cancha? ¿Cuáles son las coordenadas del vértice? Y ¿Cuál es la altura máxima que debe tener la cancha?

5) La siguiente función representa la ganancia producida por la venta de artículos que se producen en cierta fábrica.

$$G(x) = -20x^2 + 1400x - 12000$$

A partir de la función contesta las siguientes preguntas:

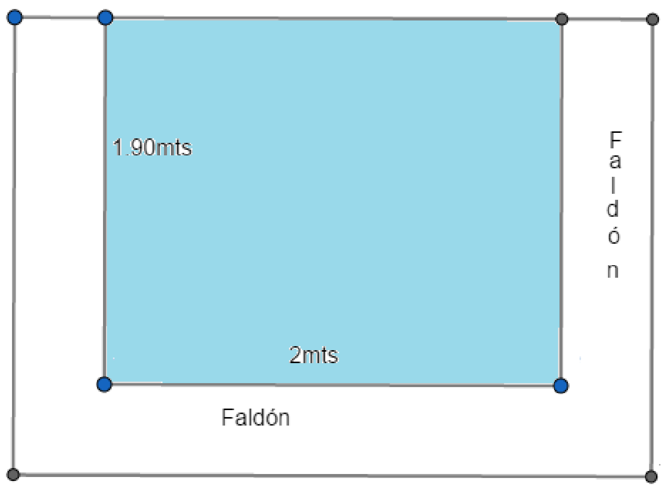
a) ¿Qué coeficiente nos indica hacia donde abre la parábola? _________
¿abre hacia? ___________

b) ¿Como determinas el vértice de la parábola? ______________. ¿Cuáles son sus coordenadas? V(,)

c) Grafica la función ganancia y explica que representa el vértice en la gráfica.

d)

6) Una costurera en una fábrica de edredones tiene la siguiente situación. Va a elaborar un edredón tamaño King Sise, un concón de ese tamaño tiene las siguientes medidas 2m de ancho por 1.90m de largo. Si tiene 6mts cuadrados de tela para el faldón del edredón de que ancho debe ser para aprovechar toda la tela.
La siguiente figura te muestra cómo debe quedar el edredón.



a) Si llamas "x" al ancho del faldón, expresa la función en términos de "x"

b) Grafica la función e interpreta en la gráfica el hecho de que no te sobre tela.

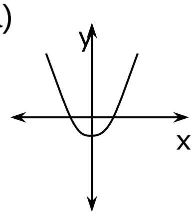
7) Grafica la siguiente función $f(x) = x^2 - 4x + 6$ y encuentra su vértice:

8) Con respecto a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 20$, responde las siguientes preguntas:

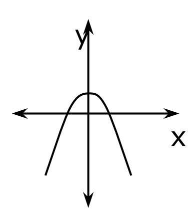
a) ¿En qué punto(s) corta al eje de las abscisas (eje X)?
b) ¿En qué punto(s) corta al eje de las ordenadas (eje Y)?
c) ¿Cuáles son las coordenadas del vértice?
d) Grafica la función.

9) Coloca la función correspondiente a su gráfica: $f(x)=-x^2-2$; $f(x)=x^2+2$; $f(x)=x^2-2$; $f(x)=-x^2+2$

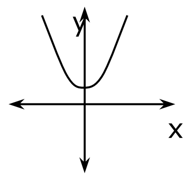
a)



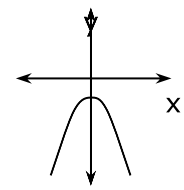
c)



b)



d)



10) Para mejorar las ventas una empresa decide invertir en publicidad y a través de un estudio de mercado encontraron la relación entre lo que invierten y el beneficio esperado en la siguiente relación. $f(x) = -5x^2 + 1000x + 5000$

a) Encuentra la cantidad x que tiene que pagar la empresa para obtener la máxima ganancia.
b) Encuentra el máximo beneficio.
c) Realiza la gráfica de la función.

Nota: resuelve el problema de la siguiente manera; si en f(**x**) = a**x**^{2} + b**x** + c completamos a un trinomio cuadrado perfecto expresándolo en la forma f(**x**) = a(**x** + **h**)^2 + **k**, el vértice de la parábola es V(**h** , **k**), lo que nos permite simplificar la interpretación y la gráfica de la función.

11) La trayectoria de un proyectil está dada por la función $d(t) = 100t - 5t^2$, donde t se mide en segundos y la altura $d(t)$ se mide en metros. Entonces, ¿en cuál(es) valor(es) de t estará el proyectil a 420 metros de altura sobre el nivel del suelo?

MATEMÁTICAS II

MATEMÁTICAS II

UNIDAD 3

ELEMENTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA PLANA

ACTIVIDAD 1

BOSQUEJO HISTÓRICO Y ELEMENTOS
BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA

ACCIÓN 1
ELEMENTOS HISTÓRICOS DE LA GEOMETRÍA.

ACCIÓN 2
ELEMENTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA PLANA.

ACTIVIDAD 2

CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS.

ACCIÓN 1
CONSTRUCCIONES BÁSICAS CON REGLA Y COMPÁS

ACCIÓN 2
ÁNGULOS Y RECTAS PARALELAS

ACTIVIDAD 3

EL TRIÁNGULO Y SUS PROPIEDADES

ACCIÓN 1
EL TRIÁNGULO

ACCIÓN 2
LOS TEOREMAS DE UN TRIÁNGULO

ACCIÓN 3
PUNTOS, LÍNEAS Y CIRCUNFERENCIAS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO

ACCIÓN 4
DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

ACCIÓN 5
TEOREMA DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES

ACTIVIDAD 4

PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS

ACCIÓN 1
CARACTERÍSTICAS DE LOS POLÍGONOS

ACCIÓN 2
CARACTERÍSTICAS DE LOS POLÍGONOS SEGÚN SUS LADOS.

ACCIÓN 3
POLÍGONOS IRREGULARES

ACCIÓN 4
FÓRMULA DE HERON

ACTIVIDAD 5

CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA

ACCIÓN 1
LÍNEAS NOTABLES DE LA CIRCUNFERENCIA, LOCALIZAR EL CENTRO DEL CÍRCULO, PERÍMETRO ÁREA DEL CÍRCULO.

ACTIVIDAD 1

BOSQUEJO HISTÓRICO Y ELEMENTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA

ACCIÓN 1

HISTORIA Y CONCEPTOS BÁSICOS DE LA GEOMETRÍA EUCLIDIANA

Objetivos: Al finalizar la acción el alumno conocerá el origen de la Geometría Euclidiana y su sistematización. Además, describirá y reconocerá los elementos básicos de una figura geométrica, los expresará en forma verbal y escrita.

AL ESTUDIANTE: En esta acción estudiaremos un poco sobre los antecedentes históricos de la geometría euclidiana, desde sus orígenes hasta su primera sistematización realizada por Euclides en su libro Los Elementos. Además, veremos que existen objetos geométricos básicos que no se pueden definir pero que son necesarios para iniciar con el estudio de la Geometría.

La palabra **geometría** tiene dos raíces griegas: *geo* = tierra y *metrón* = medida; es decir, "medida de la tierra". Al igual que otras áreas del conocimiento, es difícil precisar con exactitud cuándo y cómo nacen los primeros conceptos de la Geometría, sin embargo, es razonable pensar que los primeros orígenes de la Geometría se encuentran en los mismos orígenes de la humanidad, seguramente el hombre primitivo clasificaba los objetos que le rodeaban según su forma. En la abstracción de estas formas comienza el primer acercamiento a la Geometría.

Las primeras civilizaciones mediterráneas adquieren poco a poco ciertos conocimientos geométricos de carácter muy práctico. Estos son esencialmente algunos procedimientos para calcular áreas y longitudes. La finalidad era práctica, pues se pretendía con ello calcular la producción proporcional de las parcelas de tierra para determinar los impuestos, o reconstruir las parcelas de tierra después de las inundaciones.

Entre las civilizaciones de las que tenemos algunos documentos arqueológicos que hablan de sus conocimientos matemáticos, están los babilonios y los egipcios. La historia muestra que tanto la geometría babilónica como la egipcia, estaban íntimamente ligada a las mediciones prácticas.

Babilonios

La civilización babilónica engloba un conjunto de pueblos que vivieron en Mesopotamia en un periodo que comienza hacia el 5000 a.C. y termina en los primeros tiempos del cristianismo. Los babilonios tenían un sistema numérico avanzado. Era un sistema posicional en base 60, la razón de la elección de esta numeración hay que buscarla en el hecho de que el número 60 tiene la ventaja de admitir muchos divisores, ¿podrías escribir todos los divisores de 60? ____

____

Dividían el día en 24 horas, cada hora en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos. Esta forma de contar ha sobrevivido hasta en la actualidad. Escribir 2h 25' 30'', es decir, 2 horas, 25 minutos, 30 segundos, es equivalente a escribir la fracción sexagesimal $2 \;\; \frac{25}{60} \;\; \frac{30}{60^2}$. Adoptamos la notación 2;25,30 para este número sexagesimal. En notación de base 10 o decimal, el número sexagesimal 2;25,30 es $2 \;\; \frac{4}{10} \;\; \frac{2}{10^2} \;\; \frac{5}{10^3}$, que se escribe 2.425.

La geometría babilónica se enfocaba en la medición de figuras planas, salvo algunos indicios de problemas referentes a sólidos; determinaban el perímetro de un círculo multiplicando su diámetro por 3, esto equivale a decir que $\pi = 3$. Además, podían calcular el área de un triángulo y la de un trapecio. Los volúmenes de prismas rectos y cilindros se calculaban multiplicando el área de la base por la altura.

Los babilonios estaban familiarizados con lo que hoy conocemos como el teorema de Pitágoras y comprendían su principio general, conocían también el teorema atribuido a Thales de Mileto, según el cual el ángulo inscrito en un semicírculo es recto. Además, sabían que "los lados correspondientes de dos triángulos rectángulos semejantes son proporcionales", y que "la perpendicular trazada desde el vértice de un triángulo isósceles divide la base de este triángulo en dos partes iguales".

He aquí un problema de geometría citado por Thureau-Dangin:

> *Sea un palo 30', es decir un bastón. La parte superior ha descendido 6', ¿Cuánto se ha separado abajo?* ($30' = \frac{30}{60}$, $\;9'' = \frac{9}{60^2}$)

En el siguiente espacio, realiza un dibujo para representar este problema.

Veamos la solución del geómetra babilónico:

> *Eleva 30' al cuadrado, te dará 15'. Resta 6' de 30' (obtendrás 24'). Eleva 24' al cuadrado, encontrarás 9'36''. Resta 9'36'' de 15', obtendrás 5'24''. ¿de qué número es cuadrado 5'24''?*
> *Es 18' al cuadrado. En el suelo, se ha separado 5'24''.*

Egipcios

La base de la civilización egipcia fue la agricultura. Los reyes de Egipto dividieron las tierras en parcelas. Cuando el Nilo en sus crecidas periódicas se llevaba parte de las tierras, los agrimensores o "tensadores de cuerda", como los llamó Heródoto, tenía que rehacer las divisiones y calcular cuánto debía pagar el dueño de la parcela por concepto de impuesto, ya que este era proporcional a la superficie cultivada. No obstante, la necesidad de medir las tierras no fue el único motivo que tuvieron los egipcios para estudiar las matemáticas, pues sus sacerdotes aplicaban sus conocimientos a la construcción.
Considerando las grandes construcciones que llevaron a cabo los egipcios se podría esperar una geometría muy avanzada; pero infortunadamente no hay constancia de ello, debido a que las únicas fuentes que podemos analizar son el papiro Ahmes y el papiro de Moscú. Con los datos obtenidos en estos papiros no se descubren aspectos especiales de la geometría y lo único que nos aportan son algunos datos para el cálculo de áreas y volúmenes de figuras geométricas muy básicas. Por ejemplo, los egipcios consideraban que el área de un círculo se obtenía aplicando un cuadrado cuyo lado era igual a $\frac{8}{9}$ de la longitud del círculo. Así el valor de π era $3\frac{1}{6}$.

Griegos

La historia nos hace pensar que el conocimiento que tenían las civilizaciones babilónicas y egipcias sobre Geometría pasó a la cultura griega. La geometría de los egipcios era eminentemente empírica, sin embargo, los griegos no se contentaron con saber reglas y resolver problemas particulares, sino que buscaron obtener explicaciones racionales de las cuestiones en general y, especialmente, de las geométricas, por lo que es en Grecia donde la Geometría comienza como ciencia deductiva.

Thales de Mileto (624-ca. 548 a.C.)

Estadista, comerciante, ingeniero, astrónomo, filósofo y matemático, es uno de los siete sabios de la antigüedad. Se le atribuyen las primeras demostraciones de teoremas geométricos mediante el razonamiento lógico. Permaneció en Egipto una larga temporada de su vida, aprendiendo de los sacerdotes y escribas egipcios todo lo referente a sus conocimientos en general, y estos quedaron asombrados cuando fue capaz de medir la altura de la Pirámide de Keops y de predecir un eclipse solar.

En geometría se le atribuyen generalmente las proposiciones siguientes:
1. Cualquier diámetro biseca un círculo.
2. Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son iguales.
3. Los ángulos verticales formados por dos rectas que se cortan son iguales.
4. Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno son iguales respectivamente a dos ángulos y un lado de otro, entonces los triángulos son semejantes.

A veces se le atribuye también el teorema: "El ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto". Otros dos resultados se asocian a los trabajos de Thales: el método para medir la distancia de la orilla a un barco que se encuentra en el mar y el procedimiento para calcular la altura de una pirámide con la ayuda de un bastón vertical.

Pitágoras de Samos

Se piensa que fue discípulo de Thales. Fundó su famosa escuela pitagórica en Crotona, al sur de Italia. En aquel centro de estudios se discutía filosofía, matemáticas y ciencias naturales. Las enseñanzas se transmitían por vía oral y todo se atribuía al venerado fundador. Entre otros aspectos estudiaron los números enteros y su clasificación. También se les atribuye la demostración del teorema que lleva su nombre, el cual se enuncia como:

> *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.*

La filosofía pitagórica se basaba en la afirmación tácita de que el número entero era la causa de las distintas cualidades de los elementos del universo. "*Todo es número*", he aquí la divisa de la escuela pitagórica.

Euclides (300 a.C.)

Es considerado como el padre de la Geometría. Fundador de la escuela de matemáticas de la Universidad de Alejandría, recibió probablemente su formación matemática en la Academia platónica de Atenas; infortunadamente conocemos muy pocos detalles sobre su vida y su personalidad, incluso la fecha y lugar de su nacimiento son desconocidos.

La geometría clásica griega ha sobrevivido a través de la famosa obra escrita por Euclides, conocida como los *Elementos*. Esta obra está compuesta por trece libros y es considerada como la obra más famosa de la historia de las matemáticas. De esta obra se han hecho tantas ediciones, que sólo la aventaja la Biblia.

Los *Elementos*, recopila, ordena y sistematiza todos los conocimientos de geometría hasta su época y, salvo algunas pequeñas variaciones, son los mismos conocimientos que se siguen enseñando en nuestros días.

Euclides, usando un razonamiento deductivo parte de conceptos básicos primarios no demostrables tales como punto, recta, plano y espacio, que son el punto de partida de sus definiciones, axiomas y postulados; de las cuales se deduce toda la geometría en una forma lógica.

De los cinco postulados de Euclides, el V es el que, desde un principio, llamó más la atención:

> *Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos ángulos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los [ángulos] menores que dos rectos.*

Aunque la versión más conocida es la siguiente:

> "*Por un punto situado fuera de una recta se puede trazar una y sólo una paralela a ella*".

Esta formulación se debe al matemático griego Proclo, sin embargo, también se le conoce como el Axioma de Playfair.

Geometrías no euclidianas

Durante veinte siglos se trató de "demostrar" el quinto postulado, es decir, convertirlo en teorema. Finalmente se pensó que, si de verdad era un postulado, el hecho de negarlo, aceptando los demás, debía conducir a contradicción alguna. De esta manera procedieron Lobachevsky (1793-1856) y Riemann (1826-1866).

Y la geometría de Lobachevsky sustituye el quinto postulado por el que dice:

> "*Por un punto situado fuera de una recta pasan dos paralelas a ella*".

La Geometría de Riemann la sustituye por el siguiente:

> "*Por un punto situado fuera de una recta no pasa ninguna paralela a ella*".

Con estos nuevos dos postulados se crearon las ***geometrías no euclidianas***.

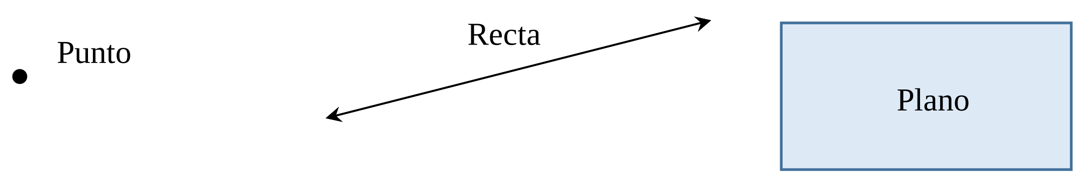
FIN DE LA ACCIÓN

ACCIÓN 2

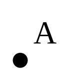
Elementos básicos de la Geometría Euclidiana

En este texto estudiaremos lo referente a la Geometría Euclidiana. La *geometría euclidiana* puede dividirse en *geometría plana* y en *geometría del espacio* o *estereometría*. La geometría plana estudia las figuras contenidas en un plano. La del espacio estudia figuras que no están contenidas en un mismo plano.

Los conceptos básicos primarios *punto*, *recta* y *plano* no se definen, sino que se captan a través de los sentidos porque son ideas o abstracciones. Pueden darse modelos físicos para cada uno de ellos. Por ejemplo, un punto puede estar representado por la huella que deja sobre un papel la punta de un lápiz; una recta puede ser sugerida por un hilo a plomo; un plano por la superficie de una pared o el pizarrón.

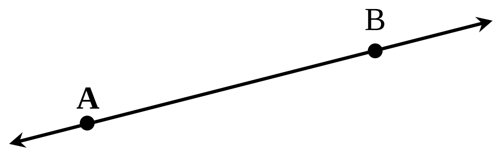


En geometría como en cualquier otra ciencia, los objetos tienen una forma muy particular de representarse. Se emplean letras mayúsculas al lado de cada punto para asignarles un nombre; punto A, punto B, etc.



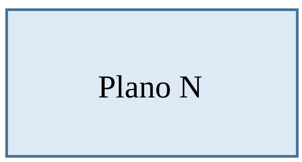
Si se considera una recta con dos puntos A y B, usando estos dos puntos se le asigna el nombre de recta AB. Esto se representa con una flecha con puntas en los dos extremos sobre AB, es decir:

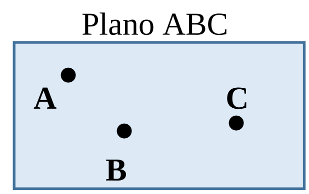
$recta\ AB = \overleftrightarrow{AB}$



Es importante mencionar que, en ocasiones, se nombra una recta con una letra minúscula cursiva. Por ejemplo, $\overleftrightarrow{AB}$ podría llamarse recta l.

Ahora bien, para nombrar un plano, se emplea una sola letra o usando tres o más de los puntos que se encuentren en él, que no estén en una misma recta. Así, se llama plano N o plano ABC.



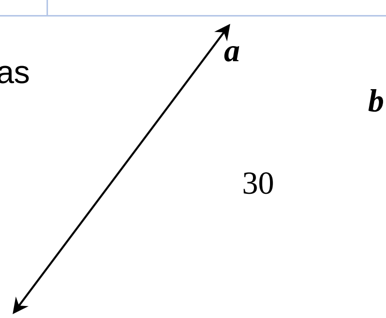


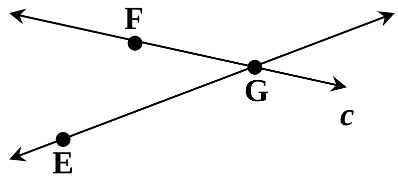
Con lo visto en las páginas anteriores, identifica en el siguiente dado, ¿qué podría sugerir un punto, una recta y un plano?

Proporciona tres ejemplos de tu vida cotidiana que podrían sugerir un punto, una recta y un plano.

Punto	Recta	Plano

Dadas las siguientes rectas





1) ¿Cómo podríamos denotar a la recta *a*? _________________

2) ¿Cómo podríamos denotar a la recta *b*? _________________

3) ¿Cómo podríamos denotar a la recta *c*? _________________

ACTIVIDAD 2

CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS.

ACCIÓN 1

CONSTRUCCIONES BÁSICAS CON REGLA Y COMPÁS

Objetivo: al concluir la acción, el alumno debe haber aprendido algunos conceptos básicos de la geometría y hacer las construcciones primarias con regla y compás con las que se realizarán todas las demás construcciones.

> **AL ESTUDIANTE:** para conocer bien las figuras geométricas es necesario que estén bien construidas, para lo cual los instrumentos empleados son la regla y el compás, en donde la regla carece de marcas que permitan medir o trasladar distancias, se usa únicamente el borde para trazar segmentos o líneas rectas que se supone tienen longitud infinita y se pueden prolongar indefinidamente en ambas direcciones, el compás debe tener bien afilada la punta.

¿Cuál es la definición de *triángulo equilátero*?

____

____

____

Dibuja en el siguiente espacio un triángulo equilátero.

¿Estás seguro de que el triángulo que dibujaste es equilátero? Explica tu respuesta. ____

¿Cuál es la definición de *triángulo isósceles*? ____

Dibuja en el espacio de la izquierda un triángulo isósceles

¿Estás seguro de que el triángulo que dibujaste es isósceles? Explica tu respuesta. ____

¿Cuál es la definición de *triángulo escaleno*? ____

Dibuja en el espacio de la derecha un triángulo escaleno.

¿Estás seguro de que el triángulo que dibujaste es escaleno? Explica tu respuesta. ____

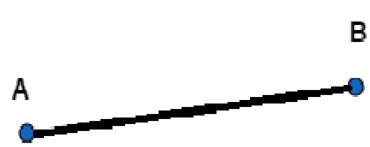
El objetivo de que construyas estos tres triángulos es que te des cuenta de que, para estar seguro del dibujo que realizaste en los triángulos equilátero e isósceles, hay que usar la regla y el compás, mientras que en el triángulo escaleno lo puedes dibujar a simple vista usando únicamente la regla.

Comencemos con las construcciones primarias, que son la base para todas las demás construcciones que se hacen.

REPRODUCCIÓN DE UN SEGMENTO

Una forma de representar un segmento con extremos A y B, es escribiendo AB con una barra encima, es decir, $\overline{AB}$ Por lo que, si ves esta expresión, de manera instantánea pensarás que se refiere al segmento que tiene como extremos los puntos A y B.

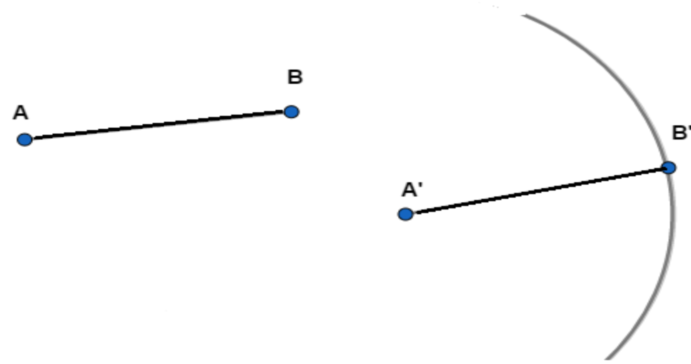
Sea $\overline{AB}$ el siguiente segmento



Copia este segmento a la derecha de él.

Toda construcción debe seguir una secuencia de pasos, en este caso los pasos son:

1. Marcamos un punto A**'** (se lee "A prima") a la derecha del segmento$\overline{AB}$.
2. Hacemos centro en A con el compás y lo abrimos hasta coincidir con B.
3. Haciendo centro con el compás en A**'** , trazamos con un arco como se ve en la figura de abajo a la derecha:
4. Luego, con la regla trazamos un segmento que una al punto A**'** con cualquier punto B**'** del arco y así queda copiado el segmento, como se ve abajo:



5. Observa que, si en vez de un arco trazas el círculo completo, cualquier radio que dibujes en este círculo es una copia del $\overline{AB}$.

No debemos decir que los $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ que acabas de construir son iguales porque ocupan dos lugares diferentes en el dibujo, lo que tienen en común es su longitud. ***En general, a dos figuras que tienen la misma forma y las mismas dimensiones se les denomina figuras congruentes.*** Por lo tanto, aquí hemos trazado dos segmentos congruentes.

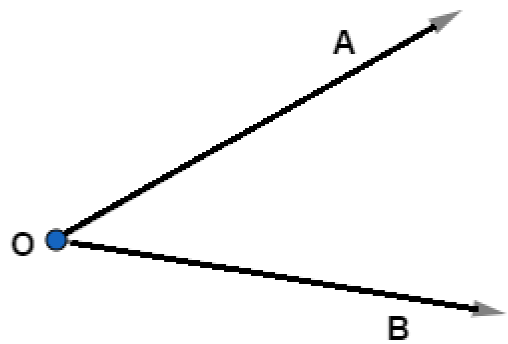
¿Qué es un ángulo? ____.

Si en una línea recta se fija un punto O (llamado origen) y se considera sólo una dirección de una línea recta (despreciando la otra mitad de ella) la semirrecta resultante se llama RAYO. Por ejemplo:

La unión de dos rayos en el mismo origen es un ÁNGULO. El origen común se llama vértice y los rayos son los lados del ángulo. Por ejemplo:

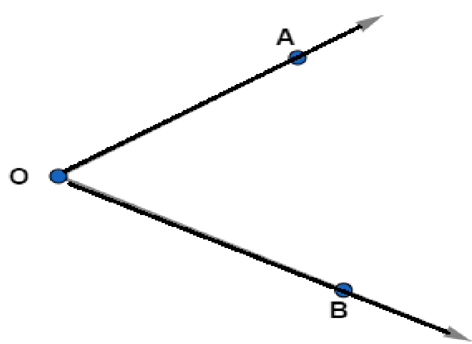
Ahora fíjate cómo se representa un ángulo.

Sea el **<** AOB, el ángulo con vértice O y puntos A y B cualesquiera en sendos lados, dibujado a continuación:



REPRODUCCIÓN DE UN ÁNGULO

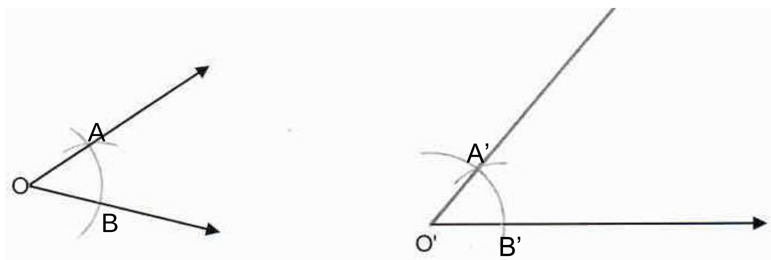
Copia el siguiente ángulo a la derecha.



Los pasos para reproducir un ángulo son:

1. Se dibuja un rayo en cualquier dirección con origen O'.

2. Hacemos centro con el compás en el vértice O y con cualquier abertura del compás, marcamos los dos lados del ángulo con un arco. Sean A y B los puntos de intersección del arco con los dos rayos como se muestra en la figura de abajo a la izquierda.
3. Con la misma abertura del compás hacemos centro en el origen O' del rayo que se dibujó en el primer paso y trazamos un arco que corte al rayo. Sea B' el punto de corte del arco con el rayo.
4. Haciendo centro en B, abrimos el compás hasta marcar el punto A.
5. Con esa abertura hacemos centro en B' y marcamos un arco que corte al arco del paso 3. Sea A' el punto de intersección de estos dos arcos, ver abajo a la derecha.
6. Trazamos el rayo $\overline{O'A'}$ y así hemos reproducido el ángulo como se ve abajo a la derecha:



Como acabamos de reproducir un ángulo, entonces tenemos dos ángulos congruentes (mas no iguales).

¿Qué es la mediatriz de un segmento? ____________________________________.

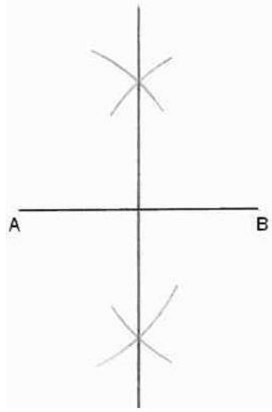
La MEDIATRIZ de un segmento es la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento.

CONSTRUCCIÓN DE LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

Construye la mediatriz del segmento $\overline{AB}$:

Los pasos para construir la mediatriz de un segmento $\overline{AB}$ son:

1. Haciendo centro con el compás en A, lo abrimos más allá de la mitad del segmento.
2. Trazamos un arco por arriba y otro por abajo del segmento, que abarquen la región por donde está el punto medio del segmento $\overline{AB}$.
3. Haciendo centro en B, trazamos de igual manera, con la misma abertura del compás, dos arcos uno por arriba y otro por abajo del segmento.
7. Unimos con la regla los dos puntos de corte de los arcos y la resultante es la línea recta mediatriz del segmento $\overline{AB}$ como se ve abajo:



¿Qué es la bisectriz de un ángulo? ____________________________________.

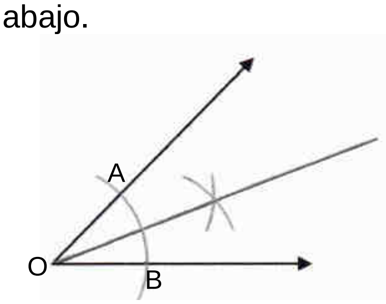
La BISECTRIZ de un ángulo es un rayo que divide al ángulo en dos ángulos congruentes.

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Construye la bisectriz del siguiente ángulo.

Los pasos para construir la bisectriz de un ángulo son:

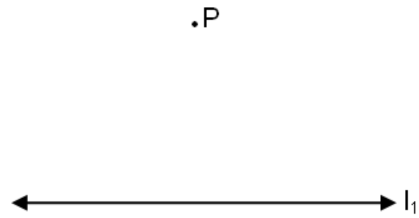
1. Haciendo centro en el vértice del ángulo, abrimos el O compás y marcamos con un arco los dos lados del ángulo. Sean A y B los puntos de intersección del arco con los lados del ángulo.
2. Haciendo centro en A, trazamos un arco por donde debe pasar el rayo mediatriz; de modo análogo, haciendo centro en B trazamos con la misma abertura otro arco. Sea C el punto de intersección de ambos arcos.
3. Trazamos el rayo $\overrightarrow{OC}$ con lo cual hemos construido la bisectriz del AOB como se muestra en el dibujo de abajo.



¿Cuándo dos rectas son perpendiculares entre sí? _________________________.

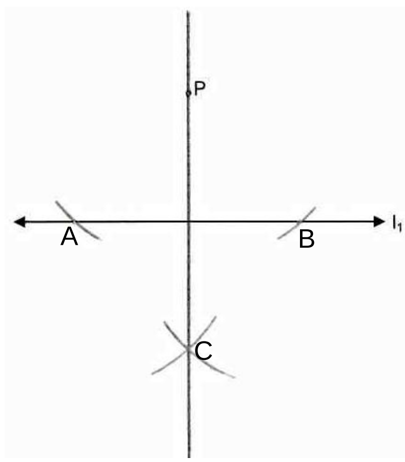
CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA PERPENDICULAR A OTRA RECTA QUE PASE POR UN PUNTO FUERA DE LA SEGUNDA RECTA

Sean l_1 una recta y P un punto cualquiera fuera de ella, dibujados a continuación. Construye la recta perpendicular a l_1 que pase por P.



Los pasos para construir la perpendicular a l_1 que pase por P son:

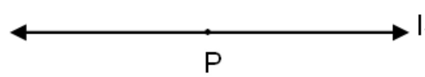
1. Hacemos centro en P y abrimos el compás más allá de la recta.
2. Con esa abertura, trazamos dos arcos sobre la recta, siendo A y B los puntos de corte.
3. Haciendo centro en A, trazamos un arco abajo de l_1 en la dirección de P; de forma análoga haciendo centro en B, trazamos otro arco que corte al anterior en el punto C.
4. Dibujamos con la regla la recta que une los puntos P y C y ésta es la perpendicular deseada.



CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA PERPENDICULAR A OTRA RECTA QUE PASE POR UN PUNTO DE ESTA ÚLTIMA

Sean l_1 una línea recta y P un punto sobre ella. Construye la recta perpendicular que pase por P, escribiendo la secuencia de pasos que seguiste para hacerlo.

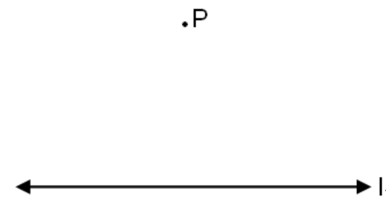
La secuencia de pasos que seguiste para construir esta perpendicular es:



1. ____
2. ____
3. ____
4. ____

CONSTRUCCIÓN DE LA RECTA PARALELA A l_1 QUE PASE POR UN PUNTO P FUERA DE ELLA

Sean l_1 una línea recta y P un punto fuera de ella. Utiliza las dos construcciones anteriores de rectas perpendiculares para que Construyas la recta paralela a l_1 que pase por P, escribiendo la secuencia de pasos que seguiste para hacerlo.



La secuencia resumida de pasos que seguiste para construir esta recta paralela es:

1. ____
2. ____

¿Qué es una circunferencia? ____.

La figura que se forma con todos los puntos de un plano que están a la misma distancia de un punto fijo se llama ***CIRCUNFERENCIA***, el punto fijo se llama CENTRO y la distancia que siempre es la misma se llama ***RADIO*** de la circunferencia. El instrumento para dibujar circunferencias bien elaboradas es el compás.

Dibuja una circunferencia con centro en el punto C que está abajo.

$\oplus$
C

De acuerdo a la definición de la circunferencia, ¿el centro de la circunferencia pertenece a la circunferencia? (argumente tu respuesta) ________________________________
____.

¿El radio de una circunferencia es parte de la circunferencia? (argumenta tu respuesta)
____

FIN DE LA ACCIÓN

ACCIÓN 2

ÁNGULOS Y RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL.

Objetivo: al concluir la acción, el alumno debe haber aprendido los elementos básicos del concepto ángulo y de los ángulos que se forman con dos rectas paralelas cuando son cortadas por una transversal.

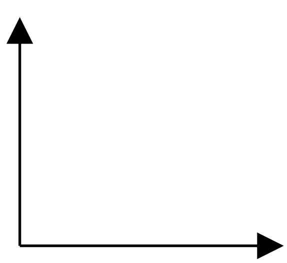
AL ESTUDIANTE: para un aprendizaje eficaz de la geometría es necesario que domines los significados y los aspectos operativos del concepto ángulo y de los ángulos que se forman con dos rectas paralelas cortadas por una recta transversal. Esta acción está dedicada a ello.

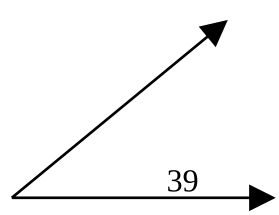
ÁNGULOS

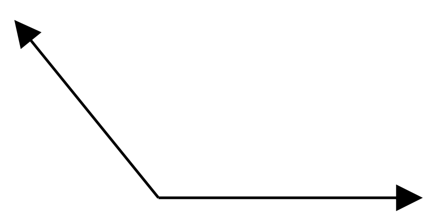
En la Acción anterior definimos el ángulo como una figura formada por dos rayos que tienen un origen común, los rayos son los lados del ángulo y el origen es el vértice.

La medida de un ángulo se hace según la abertura de sus lados y el sistema que normalmente se emplea es el sexagesimal que está dado en grados, minutos y segundos, esto lo conoces muy bien porque lo has usado desde la primaria.

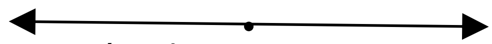
Los ángulos se clasifican según sus medidas: escribe debajo de cada uno de los siguientes ángulos el nombre que reciben de acuerdo a su medida.







ángulo ___________ ángulo ___________ ángulo __________



ángulo _______________

Es común que las figuras geométricas contengan dos, tres o muchos ángulos. Ahora vamos a clasificar a los ángulos en parejas.

- Ángulos adyacentes: dos ángulos dibujados en un plano son ***adyacentes*** si tienen un lado común entre ellos.

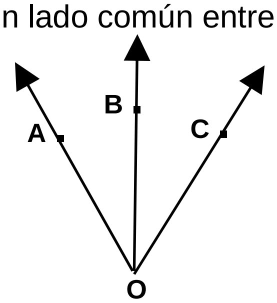


figura 1

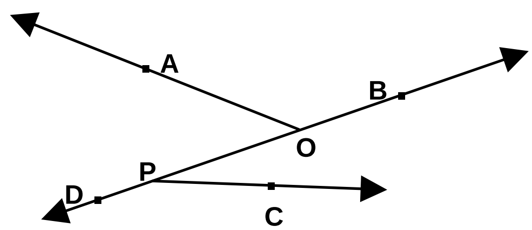
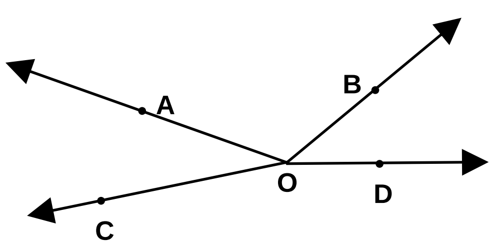


figura 2

En la figura 1 tenemos que el AOB y el BOC son adyacentes porque tienen el lado $\overline{OB}$ en común entre ellos. Ahora bien AOC y BOC **no** son adyacentes, aunque tienen en común el lado $\overline{OC}$ y debido a que $\overline{OC}$ no está entre ellos, es decir, no está situado en la inmediación que los separa.

En la figura 2 tenemos dos pares de ángulos adyacentes: POA y AOB son adyacentes y DPC con CPO es el otro par.

En las figuras 3 y 4 identifica en cada una todos los pares de ángulos adyacentes que hay.



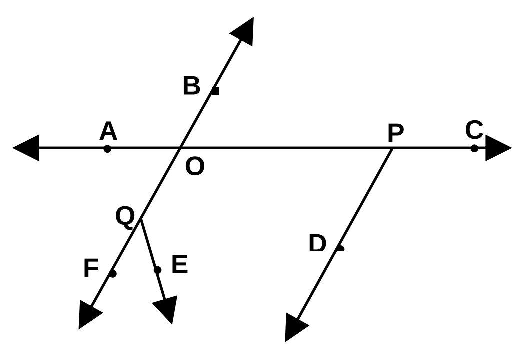


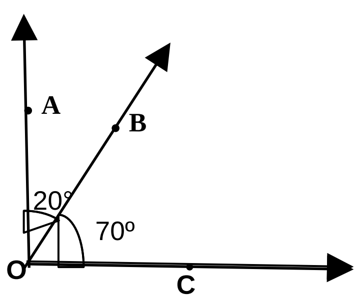
figura 3 **figura 4**

En la figura 3 los pares de ángulos adyacentes son: ___________________________

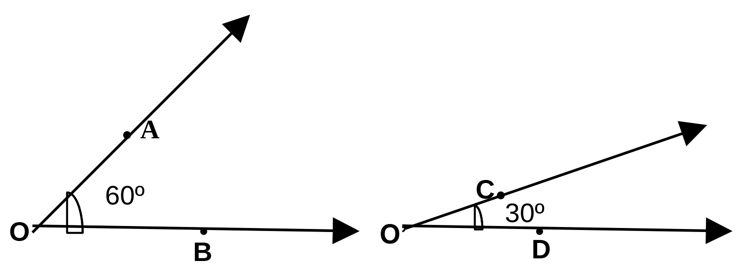
En la figura 4 son: ____.

- Ángulos complementarios: dos ángulos son ***complementarios*** si la suma de sus medidas es igual a 90°.

Dos ángulos complementarios pueden ser adyacentes o pueden no serlo y para indicar que estamos refiriéndonos a la medida de un ángulo vamos a escribir la letra ⍰ antes del símbolo del ángulo, así tenemos que m AOB significa que es la medida del AOB

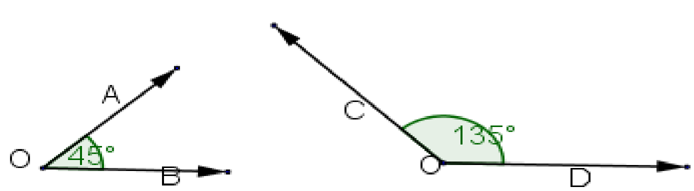


ángulos complementarios adyacentes
m AOB + m BOC = 70° +20° = 90°

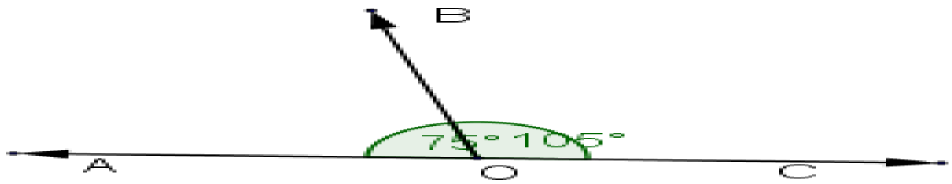


ángulos complementarios no adyacentes
m AOB + m CO’D = 60° + 30° = 90°

- Ángulos suplementarios: dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es de 180°.



ángulos suplementarios no adyacentes m AOB + m CO’D = 45° + 135° = 180°

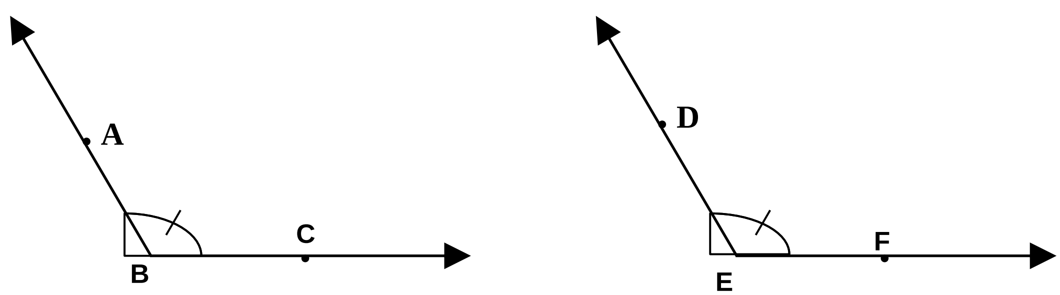


ángulos suplementarios adyacentes m AOB + m BOC = 75° + 105° = 180°

Si dos ángulos suplementarios son adyacentes se dice que forman ***un par lineal****.*

- Ángulos congruentes: dos ángulos son ***congruentes*** si tienen la misma medida.

Los ángulos ABC y DEF que están dibujados abajo *son congruentes* porque tienen la misma medida y es importante observar que *no son ángulos iguales* porque sus lados son rayos diferentes (están dibujados en diferentes lugares).
Congruencia es un concepto en geometría que significa que dos, tres o más figuras tienen la misma forma y las mismas dimensiones, la igualdad es para indicar únicamente a la misma figura, es decir el ABC sólo es igual al ABC (ABC = ABC o también ABC = CBA). Para indicar que dos **ángulos son congruentes** vamos a utilizar el signo E. Así tenemos ABC E DEF.
Geométricamente los ángulos congruentes los vamos a indicar con una rayita sobre un arco que indique la abertura de los ángulos, como se muestra abajo. También podemos decir que toda figura es congruente consigo misma, entonces todo ángulo es congruente consigo mismo, o sea ABC E ABC E CBA, como se muestra en la figura.



Si en los ángulos de arriba m ABC = m DEF = 130^0 ¿sus suplementos también son congruentes? _______. Explica tu respuesta ____________________________________.

Si GHI E JKL, dado que mGHI = mJKL = 35^0 ¿sus complementos también son congruentes? _______. Explica tu respuesta ____________________________________.

Si dos ángulos agudos son congruentes ¿sus complementos también son congruentes? ______. Explica tu respuesta ____.

¿Son congruentes los suplementos de dos ángulos congruentes? _____.
Explica tu respuesta ____.

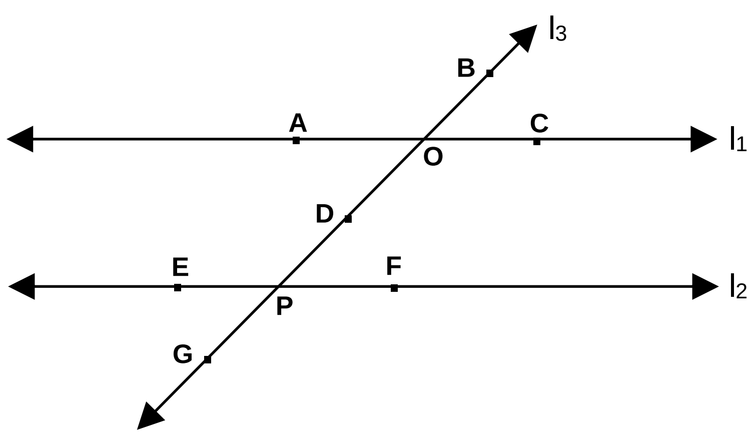
Las dos preguntas iniciales están formuladas para valores específicos de las medidas de los ángulos congruentes, por tanto, las respuestas son concretas: **si** por que la medida de cada suplemento es 50^{0}; y para la segunda pregunta la medida de los complementos de los dos ángulos congruentes es de 55^{0}.

En cambio, las últimas dos preguntas sus respuestas también son afirmativas, pero están formuladas en general, para cualquier par de ángulos que satisfagan lo requerido, es decir, para la tercera pregunta deben ser ángulos agudos y congruentes; en la cuarta pregunta basta con ser congruentes, o sea que, pueden ser agudos, rectos u obtusos.

Su carácter de estar formuladas en general las convierte en proposiciones o teoremas y en matemáticas se debe llevar a cabo una demostración. Sin embargo, esto lo abordaremos más adelante.

RECTAS PARALELAS CORTADAS POR UNA SECANTE O TRANSVERSAL

En dos rectas paralelas l_1 y l_2 cortadas por una recta l_3 secante (también llamada transversal) como las que se muestran a continuación, además de los ángulos que forman pares lineales y opuestos por el vértice tenemos los siguientes:



Ángulos alternos internos

Los ángulos alternos internos son aquellos que se alternan en ambos lados de la recta secante l_3 entre las dos rectas paralelas, por ejemplo, AOD y DPF.

Siempre que se tengan dos rectas paralelas cortadas por una transversal hay dos pares de ángulos alternos internos. En la figura anterior ubica el segundo par de ángulos alternos internos y escríbelos a continuación ___________________________.

Ahora bien, ¿crees que haya alguna relación entre los ángulos alternos internos AOD y DPF o bien, entre los ángulos alternos internos COD y DPE? _______________ En caso de que tu respuesta es afirmativa, ¿cuál es esa relación? _____________________

En general, esto que has descubierto es otra forma de enunciar el V Postulado de Euclides

> *Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos que se forman son congruentes*.

Ángulos alternos externos

Los ángulos alternos externos son aquellos ángulos que se alternan en ambos lados de la recta secante l_3 pero por fuera de las rectas paralelas como lo son AOB y FPG.

En dos rectas paralelas cortadas por una recta secante también hay dos pares de ángulos alternos externos. Escribe el segundo par ________________________________.

Ángulos correspondientes

Ángulos correspondientes: un ángulo entre las dos rectas paralelas en el que la recta l_3 contenga a uno de sus lados y el ángulo que está del mismo lado de la recta secante l_3 pero por fuera de la otra recta paralela como por ejemplo EPD y AOB se llaman ***ángulos correspondientes***.

En dos rectas paralelas cortadas por una transversal hay cuatro pares de ángulos correspondientes. Escribe los tres pares de ángulos correspondientes que hacen falta nombrar_____________________ _____________________ ____________________
En el esquema anterior podrás encontrar ocho pares de ángulos suplementarios que forman un par lineal, escríbelos a continuación ________________________________
____

También podrás encontrar ocho pares de ángulos suplementarios que no son un par lineal, escríbelos a continuación ____
____

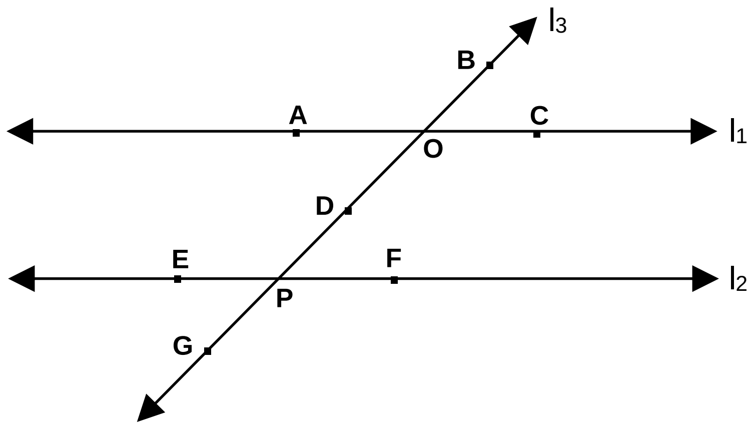
También hay cuatro pares de ángulos opuestos por el vértice ¿cuáles son? __________
____

Un resultado que hay entre los pares de ángulos de cada categoría (salvo los suplementarios) es que son congruentes, es decir: ***ángulos alternos internos son congruentes; ángulos alternos externos son congruentes, ángulos***

correspondientes son congruentes y **ángulos opuestos por el vértice son congruentes**.

Por ejemplo, AOD E DPF por ser alternos internos. También por ser alternos externos se tiene que AOB E FPG y EPD E AOB por ser correspondientes, por último AOB E COD por ser opuestos por el vértice. Todas las parejas de ángulos que identificaste y escribiste (salvo las suplementarias) son congruentes.

En la figura siguiente dibuja en cada ángulo un arco que indique la abertura y cruza con guion todos los que son congruentes y con dos guiones los que representan otra clase de ángulos congruentes



EJERCICIOS.

Aplica los conceptos vistos en esta acción y desarrolla tu habilidad para hacer operaciones de acuerdo al concepto que se esté tratando, para formular ecuaciones lineales en una incógnita para que obtengas el valor de la incógnita y el valor de los ángulos que se indican en cada ejercicio.

Ejercicio 1. ¿Cuánto mide el complemento de un ángulo que mide 63°? _______. Si el ángulo mide 55 °40' ¿cuánto mide su complemento? __________ . Si otro ángulo mide 13°21'55'' ¿cuánto mide su complemento? _____________.

Ejercicio 2. Dos ángulos congruentes son complementarios ¿cuánto mide cada ángulo? ___________________.

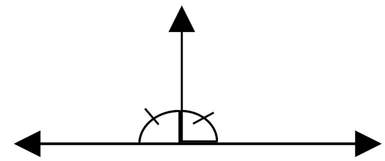
Ejercicio 3. Un ángulo mide la mitad de su complemento ¿cuánto mide dicho ángulo? __________ y ¿cuánto mide su complemento? _____________.

Ejercicio 4. Un ángulo es el triple de su complemento ¿cuánto mide dicho ángulo? ____ y ¿cuánto mide su complemento? _____________.

Ejercicio 5. Un ángulo es la cuarta parte de su complemento ¿cuánto mide dicho ángulo? _______ y ¿cuánto mide su complemento? _____________.

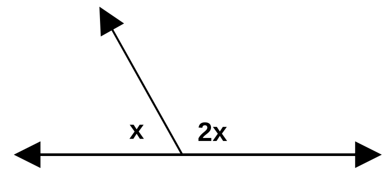
Ejercicio 6. Un ángulo mide cinco veces más que su complemento ¿cuánto mide dicho ángulo? _______ ¿y cuánto mide su complemento? _____________.

Ejercicio 7. Redacta la pregunta en términos de lo que indica la figura de la derecha ¿______________________________ ____?
La respuesta a la pregunta es __________________________.



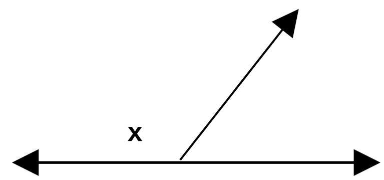
Ejercicio 8. Según el dibujo de la derecha redacta una pregunta en términos de la incógnita x ¿______________________ ____?

La respuesta a esta pregunta es _________________________.



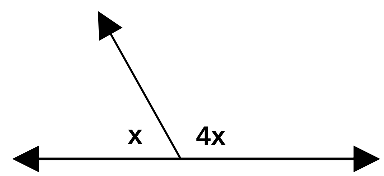
Ejercicio 9. Según el dibujo de la derecha redacta una pregunta en términos de la incógnita x ¿______________________ ____?

La respuesta a esta pregunta es _________________________.



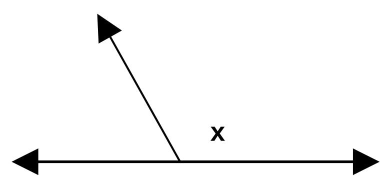
Ejercicio 10. Redacta una pregunta de acuerdo a la incógnita x que observas en la figura derecha ¿_________________ ____?

La respuesta a tu pregunta es __________________________.



Ejercicio 11. Para el dibujo que observas a la derecha fórmula una pregunta en términos de la incógnita x.
¿____?

La respuesta es: __________________________________.

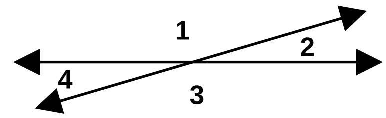


Ejercicio 12. La diferencia entre dos ángulos suplementarios es de 50°.
¿Cuánto miden estos ángulos?
Respuesta:

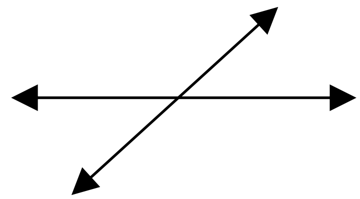
Ejercicio 13. ¿Cuánto valen dos ángulos suplementarios, si su diferencia es de 4°?
Respuesta:

Ejercicio 14. Un ángulo es cuatro quintos de su complemento.
¿Cuánto valen estos ángulos?
Respuesta:

Ejercicio 15. En la figura de la derecha el ángulo mayor es ocho veces mayor que el menor ¿cuánto vale cada uno de los cuatro ángulos? m 1 = _______, m 2 = _______,
m 3 = _______, m 4 = _______

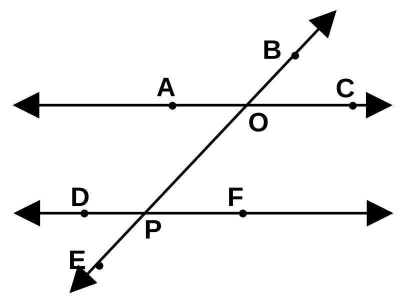


Ejercicio 16. Si ***a*** y ***b*** son las medidas de dos ángulos suplementarios. Con base en la siguiente figura demuestra en el siguiente espacio que ángulos suplementarios de ángulos congruentes son congruentes.



Ejercicio 17. Elabora una figura a la derecha para que con base en ella demuestres que complementos de ángulos congruentes son congruentes.

Ejercicio 18. En la figura de la derecha se tienen dos rectas paralelas cortadas por una transversal. Si m EPF = 135° calcula la medida de los siete ángulos restantes diciendo porqué: m AOB = _____ porque ___________________, m BOC = _____ porque ______________, m AOP = _____ porque _______________, m POC = _____ porque _________________, m DPO = _____ porque ______________, m OPF = _____ porque ____________ _________, m DPE = _____ porque ________________



Ejercicio 19. En la figura anterior, si m FPO = x y m FPE = y, además y – x = 100°, calcula el valor de los ocho ángulos indicándolos con sus letras respectivas.

Ejercicio 20. En relación con la misma figura m AOB = x y m DPE = y, con $y = \frac{1}{5}x$, calcula el valor de los ocho ángulos indicándolos con sus letras respectivas.

Ejercicio 23. Siguiendo con la misma figura tenemos que m AOB = 3x - 20 y m DPE = 12x. Encuentra el valor de la incógnita y el valor de todos los ángulos.

Ejercicio 22. Si m COP = 4x - 20 y m OPD = 3x + 30. Calcula el valor de la incógnita y el valor de todos los ángulos.

FIN DE LA ACCIÓN

ACTIVIDAD 3

ACCIÓN 1

EL TRIÁNGULO

Objetivo: al concluir la acción, el alumno conocerá la clasificación de los triángulos, comprenderá en qué consiste la desigualdad del triángulo y comprenderá algunas de las propiedades de los elementos del triángulo.

AL ESTUDIANTE: en esta parte de la acción estudiarás no solamente la clasificación de los triángulos, sino que también, analizarás algunas de las propiedades que éste tiene. Verás que el triángulo, a pesar de ser una de las figuras geométricas más básicas, sus elementos presentan muchas propiedades importantes.

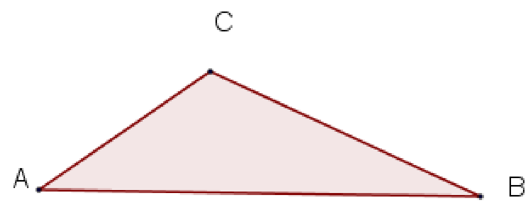
EL TRIÁNGULO

Vamos a empezar con una de las figuras geométricas planas más básica: El **triángulo**.

¿Qué es un triángulo?
____.

La figura formada por ***tres puntos no colineales y los segmentos que los unen*** se llama ***triángulo***, los segmentos son los ***lados del triángulo*** y los puntos se llaman ***vértices***, porque generan tres ángulos y con ellos se forma el interior del triángulo.

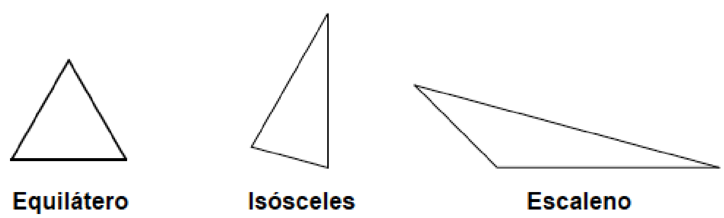
Sí, en un triángulo los tres puntos no colineales los designamos con letras mayúsculas, por ejemplo A, B y C, entonces el triángulo lo representamos así ΔABC, los lados son los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ y los ángulos son $\angle BAC, \angle ABC$ y $\angle ACB$ o simplemente A, B y C si no hay confusión.



Así, en cualquier triángulo tenemos básicamente seis magnitudes (entre otras): la longitud de los lados y la medida de los ángulos.

De acuerdo a sus lados, los triángulos se clasifican en:

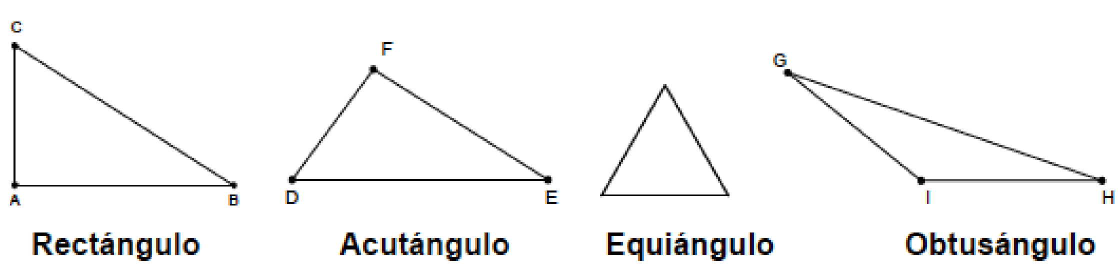
- **Equilátero**, cuando sus tres lados son congruentes.
- **Isósceles**, cuando al menos dos de sus lados son congruentes.
- **Escaleno**, cuando sus tres lados tienen longitudes diferentes.



De acuerdo a sus ángulos, los triángulos se clasifican en:

- **Rectángulo**, si uno de sus ángulos interiores es recto.
- **Acutángulo**, cuando sus tres ángulos interiores son agudos. Un caso muy particular de triángulo acutángulo es cuando los tres ángulos internos son congruentes, a este tipo de triángulo se le llama **equiángulo**. Podrías decir, ¿cuánto mide cada ángulo interno de un triángulo equiángulo? ___________ y ¿Con qué otro nombre se le conoce? ________________________________

- **Obtusángulo,** si uno de sus ángulos interiores es obtuso.



Ahora bien, vamos a plantear algunas oraciones para comprobar que todo haya quedado claro. En cada oración completa los espacios con *algunas veces*, *siempre* o *nunca*. Es importante que reflexiones sobre tu respuesta, trata de dibujarlos en tu cuaderno, en caso necesario.

1) Los triángulos isósceles ________son equiláteros.
2) Los triángulos rectángulos _________son obtusángulos.
3) Los triángulos equiláteros _______ son isósceles.
4) Los triángulos escalenos _________ son isósceles.
5) Los triángulos rectángulos _________ son acutángulos.
6) Los triángulos acutángulos _________ son equiláteros.
7) Los triángulos obtusángulos ________ son escalenos.
8) Los triángulos equiángulos _________ son acutángulos

DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO

Ahora vas a trabajar con el compás y con la regla graduada para que puedas medir segmentos en centímetros.

Dibuja abajo en la figura 1 un triángulo con 5 cm en cada uno de sus lados. En la figura 2 un triángulo que sus lados midan 5, 5 y 3 cm. y un tercer triángulo de 2, 5 y 6 cm en sus lados.

Figura 1 Figura 2 Figura 3

¿Cómo se llama el triángulo de la figura 1? _______________, ¿el de la figura 2? _______________ y ¿el de la figura 3? ________________.

Ahora dibuja en la figura 4 un triángulo isósceles de lados 2, 2 y 6 cm, y en la figura 5 dibuja otro cuyos lados sean 2, 4 y 7 cm.

Figura 4 Figura 5

¿Has pensando que no se pueden trazar? _____ ¿cuál es la causa por la cual no se pueden trazar estos dos últimos triángulos con dichas medidas? _____________
____

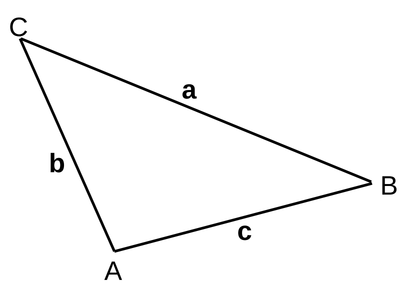
Al intentar dibujar un triángulo en el que las medidas de los lados sean 2, 2 y 6 cm dibujamos primero un lado, por ejemplo, el de 6 cm y en cada extremo dibujamos dos circunferencias de 2 cm, es claro que estas dos circunferencias no se interceptan. Si se interceptaran podríamos trazar su punto de intersección y unirlo con los extremos del segmento dibujado.

Para que se intercepten las dos circunferencias, la suma de la longitud de los radios debe ser mayor de 6 cm; por tanto, con segmentos de longitud 2, 2 y 6 cm no se puede formar un triángulo. Lo mismo sucede con los segmentos de longitud 2, 4 y 7 cm.

¿Qué condición deben cumplir tres segmentos para que se forme un triángulo?
____

LA DESIGUALDAD DEL TRIÁNGULO establece una condición para que tres segmentos conformen un triángulo. Esta condición dice así: ***EN UN TRIÁNGULO LA SUMA DE LAS LONGITUDES DE DOS LADOS CUALESQUIERA DEBE SER MAYOR QUE LA LONGITUD DEL TERCER LADO***.

Si **a**, **b** y **c** son las longitudes de los lados de un triángulo como el de la siguiente figura, entonces se deben cumplir las tres desigualdades que se indican:



$\mathbf{a} + \mathbf{b} > \mathbf{c}$

$\mathbf{a} + \mathbf{c} > \mathbf{b}$

$\mathbf{b} + \mathbf{c} > \mathbf{a}$

Otra forma de enunciar la desigualdad del triángulo es: ***la longitud de cualquier lado de un triángulo siempre es menor que la suma de las longitudes de los otros dos***.

Una consecuencia lógica que se desprende de la desigualdad del triángulo es: ***la distancia más corta entre dos puntos es la del segmento que generan dichos puntos***.

FIN DE LA ACCIÓN

ACCIÓN 2

LOS TEOREMAS DE UN TRIÁNGULO

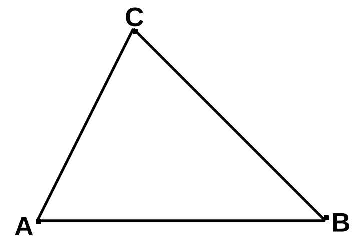
Objetivo: al concluir la acción, el alumno debe demostrar los teoremas que involucran la suma de los ángulos tanto internos como externos de un triángulo y trabajar en forma operativa este resultado.

AL ESTUDIANTE: la acción es muy breve, el principal concepto se pudo haber tratado en la acción anterior, pero se prefiere separarlo porque se pretende que entiendas el papel que juegan las demostraciones rigurosas que se hacen en geometría de las propiedades que tienen las formas o figuras tales como los triángulos.

Ya conoces los triángulos y algunas de sus propiedades. Ahora escribe en el siguiente espacio la definición del concepto triángulo ___________________________________
____.

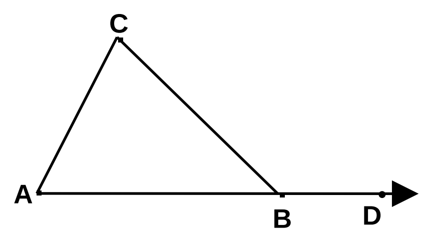
- La figura que se forma con los segmentos de tres puntos que no son colineales se llama ***triángulo***.

Si A, B y C son tres puntos que no están en una línea recta, los segmentos que se forman con cada par de puntos AB, AC y BC son un triángulo, los lados del triángulo son estos tres segmentos y como cada par de lados tienen un punto en común generan un ángulo cuyos lados contienen a los segmentos que son los únicos que se dibujan, pero pueden extenderse a los rayos correspondientes (que no son partes del triángulo), los vértices si son partes del triángulo porque son los extremos de los lados del triángulo. Así, tenemos (abusando del lenguaje) que un triángulo está constituido por tres lados y tres ángulos, o más propiamente dicho, por tres lados y tres vértices como el que se muestra a la derecha. A continuación, denota cuáles serían los ***ángulos internos*** o ***interiores*** del triángulo:



__________________ ______________________ _________________________

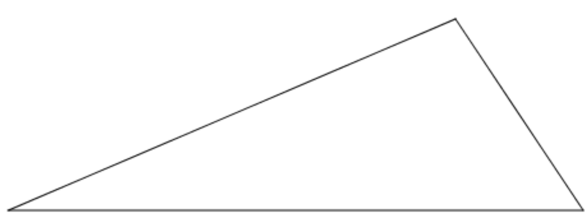
Si extendemos un lado del ángulo al rayo correspondiente como se muestra a la derecha se genera el CBD en el exterior del triángulo, por esta razón a dicho ángulo se le llama ***ángulo externo*** o ***exterior del triángulo***.



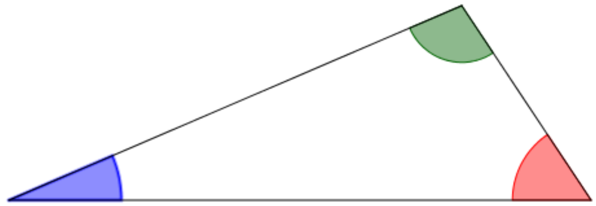
Con esto tenemos identificados a los ángulos interiores de un triángulo y a los ángulos externos. Observa que a cada ángulo interno de un triángulo podemos construirle un ángulo externo, formando estos dos ángulos un par lineal.

Seguramente ya sabes cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo, ¿cuánto suman? _________________ ¿Sabes cómo se podría justificar este resultado?, ¿o únicamente lo sabes porque desde la primaria te lo han dicho? Aquí vamos a demostrarlo usando los ángulos internos y externos de un triángulo, además se trazará una recta paralela a uno de los lados del triángulo para trabajar con ángulos alternos internos y correspondientes que vimos en la acción anterior. Sin embargo, antes de ellos veamos una forma sencilla de justificar o ver que efectivamente la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180º.

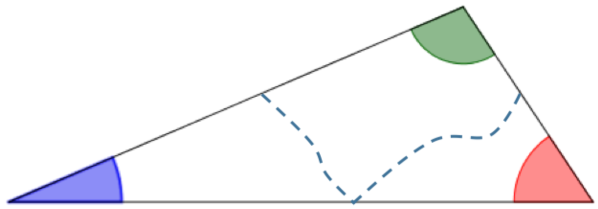
1. Toma una hoja de tu cuaderno y construye un triángulo de medidas arbitrarias.

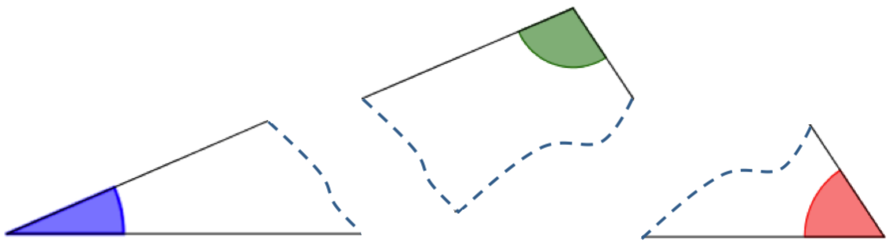


2. Colorea con diferentes colores una parte de los ángulos internos del triángulo, tal como se muestra a continuación y recorta el triángulo.



3. Recorta el triángulo en tres pedazos, por ejemplo, recortando como se marca en las líneas punteadas





1. Acomoda las piezas del triángulo de tal manera que los ángulos sean adyacentes dos a dos. ¿Qué ángulo se forma con los tres ángulos internos del triángulo? ____

____

2. ¿Qué puede concluir acerca de la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo? Compara tu respuesta con las de tus compañeros. ___________

____

Como haz visto, esta es una forma sencilla de observar que la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo siempre suma 180º, es decir, forman un ángulo llano. Sin embargo, es necesario realizar una demostración de que en efecto esto es válido para cualquier triángulo. El carácter de estar formulada en general, lo convierte en una proposición o teorema y en matemáticas se debe llevar a cabo una demostración.

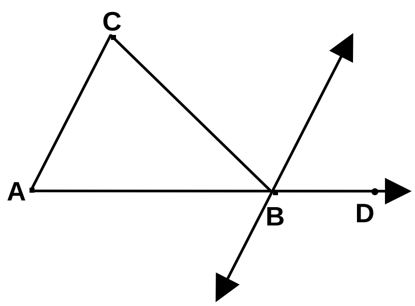
Aquí vamos a demostrarlo usando los ángulos interiores y exteriores de un triángulo, además se trazará una recta paralela a uno de los lados del triángulo para trabajar con ángulos alternos internos y correspondientes que vimos en la acción anterior.

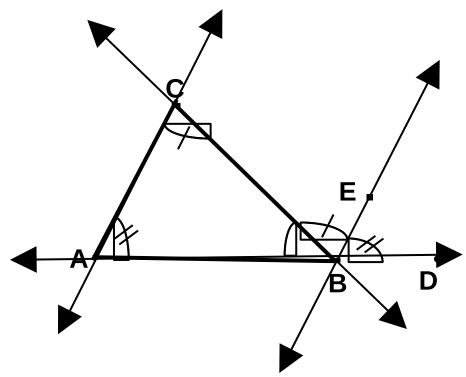
Teorema 1*.* Los ángulos internos de un triángulo suman 180°.

Demostración. En el triángulo ⊗ABC extendamos un lado para formar un ángulo exterior como el CBD de la figura anterior que forma un par lineal con el ángulo interior B, así tenemos que m B + m CBD = 180°.

Tracemos la recta paralela al lado AC del triángulo que pase por el vértice B como se muestra abajo a la izquierda.

Si extendemos a líneas rectas todos los lados del ⊗ABC identificamos claramente dos rectas paralelas cortadas por dos rectas transversales que son las generadas por los segmentos AB y BC esto se muestra en la figura de la derecha abajo





Observamos en esta figura de la derecha que el C y el CBE son alternos internos por lo tanto son congruentes, además en la transversal generada por el AB él A y él EBD son correspondientes, luego también son congruentes.

En síntesis, de todo esto tenemos lo siguiente: (ve corroborándolo con la figura de la derecha)

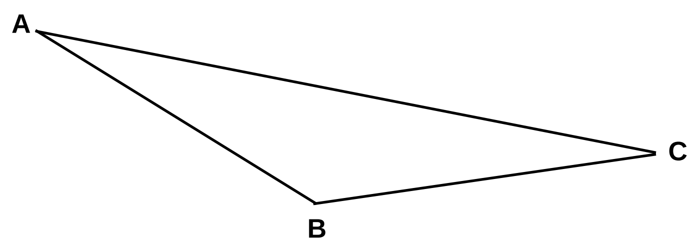
Afirmaciones	Razones
m B + m CBD = 180°	Por ser un par lineal
m CBD = m CBE + m EBD	Por ser ángulos adyacentes
m B + m CBE + m EBD = 180°	Sustituyendo la afirmación 2 en la 1
m C = m CBE	Por ser ángulos alternos internos
m A = m EBD	Por ser ángulos correspondientes
m B + m C + m A = 180°	Sustituyendo las dos últimas afirmaciones en la tercera afirmación
m A + m B + m C = 180°	Reordenando los sumandos concluimos la demostración

Esta demostración no la debes de aprender de memoria mecánicamente, debe ser en forma razonada para que así potencies tu aprendizaje y tu cerebro aprenda a operar con la lógica formal.

Si ya entendiste esta demostración con base en la lógica deductiva, te proponemos que hora la hagas esta misma demostración con base en la figura del triángulo que a continuación se dibuja y que no mires la demostración anterior.

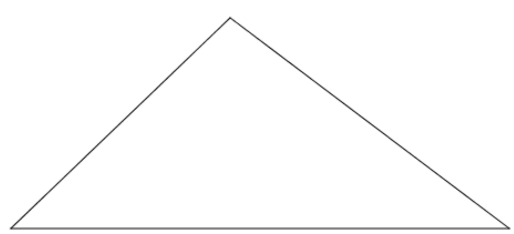
Proposición 1a. La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

Demostración. Realiza la demostración tomando como base el siguiente triángulo.

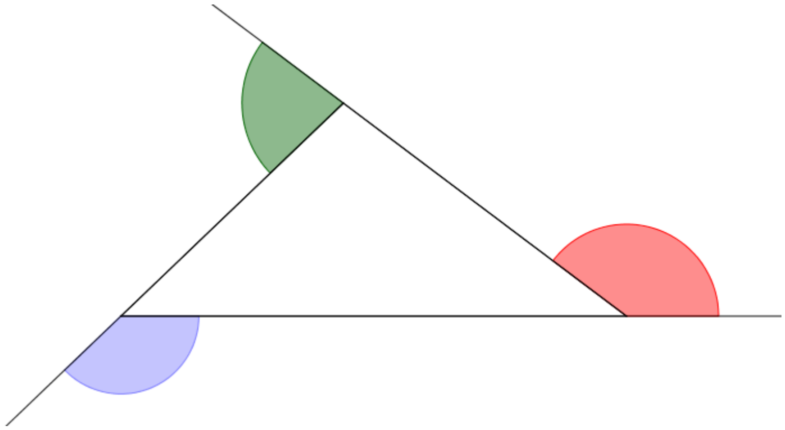


Veamos otro teorema importante del triángulo que involucra los ángulos externos. Aplicando la misma idea de recortar.

1. Traza un triángulo cualquiera en una hoja de tu cuaderno.



2. Traza cada ángulo externo correspondiente a cada ángulo interno de tu triángulo y coloréalos. Por ejemplo,



3. Recorta las partes que corresponden a los ángulos externos y forma con ellos ángulos adyacentes dos a dos. ¿Cuánto suman los tres ángulos externos?

   ____

   Compara tu respuesta con la de tus compañeros.

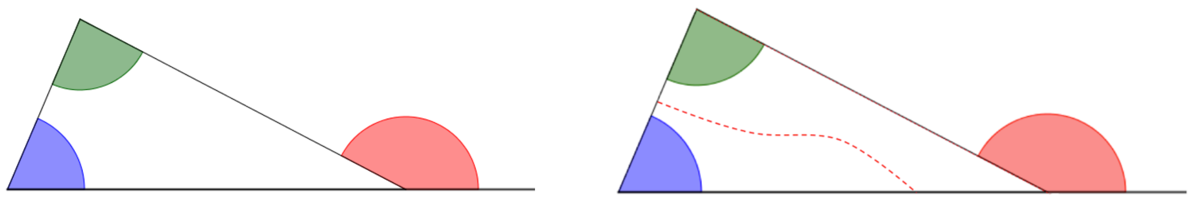
Con base en la actividad anterior, ¿Cómo podrías formular el teorema? Escríbelo en el siguiente espacio.

Teorema 2. ____
____
____

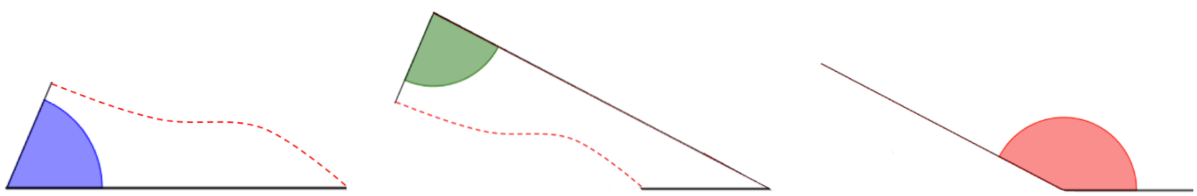
Por supuesto, este teorema se puede demostrar de manera formal, tal y como se hizo con el de la suma de los ángulos internos. Intenta realizar la demostración en el siguiente espacio.

Por último, veamos cómo se relacionan los ángulos internos con los ángulos externos de un triángulo. Nuevamente, retomaremos la idea de recortar el triángulo.

1. Dibuja un triángulo cualquiera, traza un ángulo externo coloreándolo de un color y dos de los ángulos internos no adyacentes a él, puedes guiarte en la siguiente figura.



2. Recorta los dos ángulos internos y el ángulo externo.



3. Utilizando los recortes, determina si hay alguna relación entre los tres ángulos, ¿Qué puedes concluir? ____
____
____

Compara tu respuesta con la de tus compañeros.

Con base en lo observado, ¿Cómo podrías formular el teorema? Escríbelo en el siguiente espacio.

Teorema 3. ____
____
____

En el siguiente espacio realiza la demostración.

EJERCICIOS

Ejercicio 1. ¿Cuánto mide el C en un ⊗ABC si m A = 15° y m B = 20°? __________.

Ejercicio 2. ¿Cuánto mide el C en un ⊗ABC si m A = 25°35’ y m B = 82°? __________.

Ejercicio 3. ¿Cuánto mide el C en un ⊗ABC si m A = 58°48’ y m B = 79°51’? __________.

Ejercicio 4. La suma de las medidas de dos ángulos exteriores de un triángulo es 100° escribe una posibilidad para las medidas de cada uno de los tres ángulos de dicho triángulo ________________________.

Ejercicio 5. En un triángulo rectángulo un ángulo mide 47°. ¿Cuánto miden los otros dos ángulos? ______________.

Ejercicio 6. Un ángulo exterior de un triángulo rectángulo mide 160°. ¿Cuánto miden los tres ángulos de dicho triángulo? __________.

Ejercicio 7. Uno de los ángulos de un triángulo rectángulo es tres medios del otro. ¿Cuánto miden los tres ángulos de este triángulo? ____________________________.

Ejercicio 8. Uno de los ángulos de un triángulo es el doble de otro y el triple del tercero. ¿Cuánto miden los tres ángulos de este triángulo? ____________________________.

FIN DE LA ACCIÓN

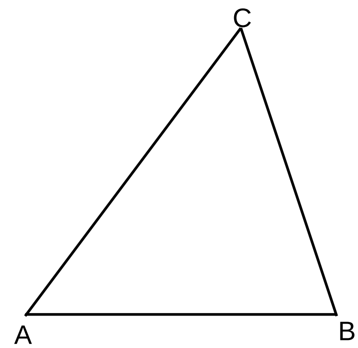
ACCIÓN 3

PUNTOS, LÍNEAS Y CIRCUNFERENCIAS NOTABLES EN EL TRIÁNGULO

Objetivo: al concluir la acción, el alumno debe aprender algunos conceptos geométricos fundamentales, obteniendo de las construcciones, las nociones de puntos, líneas y circunferencias notables en el triángulo.

AL ESTUDIANTE: continuando con lo que ya aprendiste sobre el uso de la regla y el compás para construir relaciones geométricas básicas, vas a aprender a construir conceptos geométricos básicos y los vas a definir a partir de su construcción.

Ejemplo 1. En cada uno de los lados del ⊗ABC (triángulo con vértices A, B y C) construye las mediatrices.



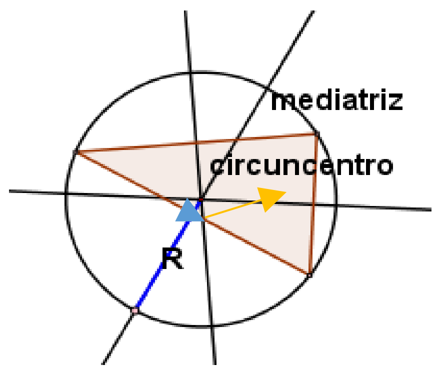
¿Qué hecho notable sucede con las tres mediatrices que acabas de construir? ________________

Las **mediatrices** de un triángulo son tres rectas notables de él. Debes saber que el punto en donde se intersecan es un punto notable llamado ***CIRCUNCENTRO***.

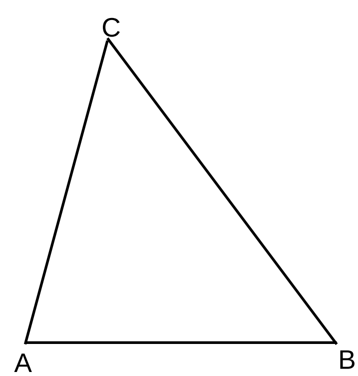
Haciendo centro en el circuncentro abre el compás hasta marcar un vértice del triángulo y traza la circunferencia.

¿Qué hecho notable observas en esta circunferencia? __________________________.

Cuando una circunferencia queda fuera de un triángulo (también puede ser un cuadrado o rectángulo, un pentágono, hexágono o cualquier otra figura poligonal) de tal manera que todos sus vértices estén sobre dicha circunferencia, se dice que es una ***circunferencia circunscrita*** al triángulo (o a la figura poligonal). Seguramente te diste cuenta de que la circunferencia que acabas de dibujar *circunscribe* al ⊗ABC, por eso se llama ***circunferencia circunscrita*** y por eso el nombre de su centro es ***circuncentro*** que es el punto de intersección de las tres mediatrices. Esta circunferencia es notable para el triángulo.



Ejemplo 2. En cada uno de los ángulos del ⊗ABC traza las bisectrices.



¿Qué hecho notable sucede con las tres bisectrices que acabas de construir? ________________

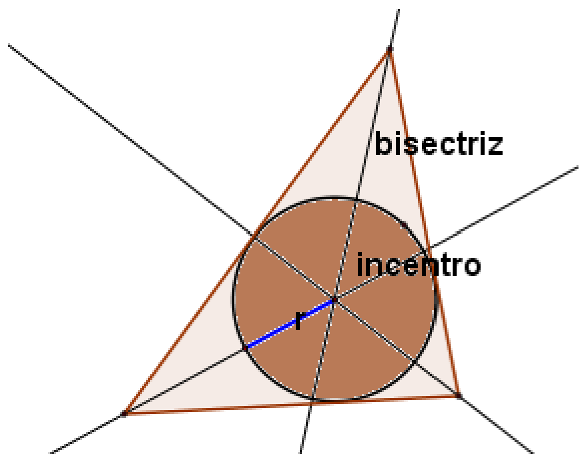
Las **bisectrices** de un triángulo son tres rectas notables de él y el punto donde se intersecan es un punto notable llamado ***INCENTRO***.

Haciendo centro en el incentro abre el compás hasta que traces una circunferencia que toque por dentro al triángulo en sus tres lados.

¿Qué hecho notable es el que hay que destacar en esta circunferencia? _____________.

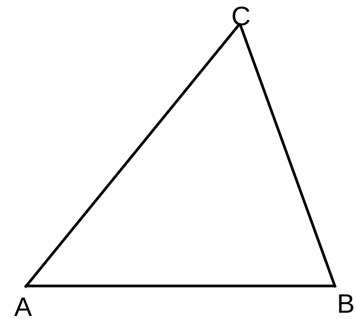
Si una circunferencia queda dentro de un triángulo (también puede ser un cuadrado, pentágono, hexágono o cualquier otro polígono regular) de tal manera que toque (sea tangente) a todos sus lados, se dice que la *circunferencia está inscrita* al triángulo (o al polígono regular). La circunferencia que acabas de dibujar está inscrita al ⊗ABC, por eso se llama ***circunferencia inscrita*** y al centro se le llama ***incentro*** que es el punto de intersección de las tres bisectrices. Esta circunferencia también es notable para el triángulo.

¿Qué es una altura de un triángulo? ____.



El segmento (o la línea recta según el uso que se le dé) perpendicular a un lado de un triángulo que parte del vértice opuesto se llama ***ALTURA***. Como el triángulo tiene tres lados entonces tiene tres alturas

Ejemplo 3. En la acción anterior te enseñaste a trazar la perpendicular a una recta o a un segmento, entonces traza las tres alturas del ⊗ABC

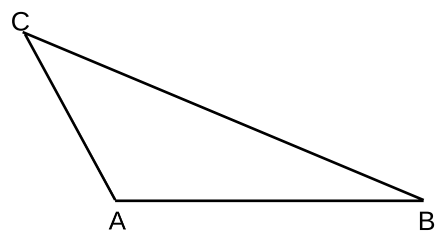


¿Qué hecho notable sucede con las tres alturas que acabas de construir? ___________________

Las alturas de un triángulo son tres segmentos (o tres líneas rectas) notables y el punto en donde se intersecan es un punto notable llamado ***ORTOCENTRO***.

Con el ortocentro no se forma circunferencia notable.

Ejemplo 4. El ortocentro no necesariamente se localiza en el interior del triángulo.



Para que lo compruebes construye el ortocentro usando la regla y el compás en el siguiente triángulo.

En esta construcción se hace necesario prolongar dos lados del triángulo y también prolongar las tres alturas para obtener el ortocentro.

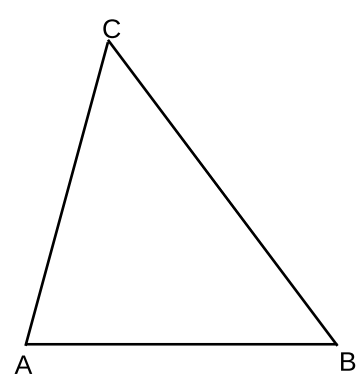
En un triángulo ¿qué es una mediana? ______________________________________.

La recta (o el segmento según el uso que se le dé) que se genera con un vértice de un triángulo y el punto medio del lado opuesto se llama ***MEDIANA.***

Ejemplo 5. Traza las tres medianas del ⊗ABC que está a la derecha.

¿Qué hecho notable sucede con las tres medianas que acabas de construir? _______________.

Las medianas de un triángulo son tres rectas notables y el punto en donde se intersecan es un punto notable llamado ***BARICENTRO***.

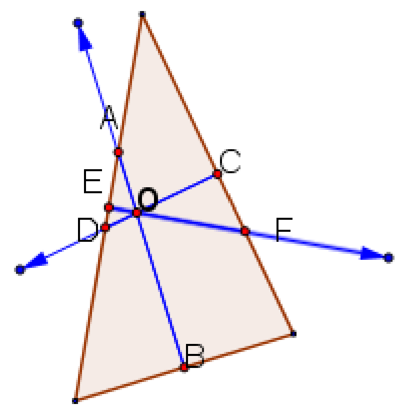


Con el baricentro **no** se forma circunferencia notable.
Sin embargo, se tiene la siguiente propiedad:

El segmento BO es ⅔ del segmento BA

El segmento FO es ⅔ del segmento FE

El segmento CO es ⅔ del segmento CD



Para resumir los conceptos desarrollados hasta aquí escribe el nombre de las cuatro líneas notables y describe el significado de cada una (no leas arriba estos conceptos, reflexiónalos dándoles tu significado personal y escríbelos a continuación).

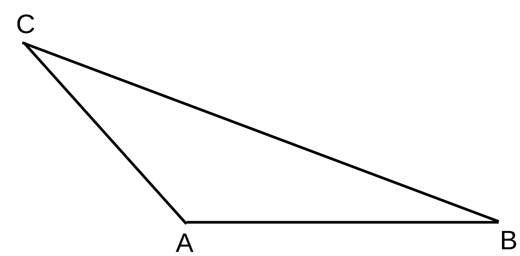
1.____.
2.____.
3.____.
4.____.

A continuación, se te da el nombre de las líneas notables correlaciónalas con el punto notable y la circunferencia notable si esta existe.

Líneas notables	Punto notable	Circunferencia notable
Alturas	___________	___________________
Bisectrices	___________	___________________
Mediatrices	___________	___________________
Medianas	___________	___________________

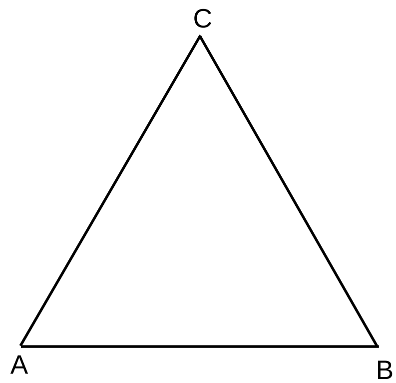
El incentro y el baricentro son puntos que siempre se localizan dentro del triángulo, escribe porqué sucede esto. ____

En el ejemplo 4 localizaste el ortocentro fuera del triángulo, ahora construye el circuncentro del ⊗ABC de la derecha y observa que también se localiza afuera del triángulo. Con este punto notable traza la circunferencia notable

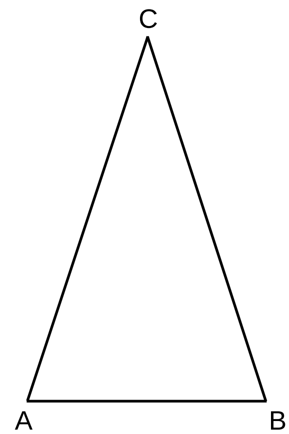


Con el fin de que analices cómo son las líneas, los puntos y las circunferencias notables en los triángulos equiláteros e isósceles, construye todos estos elementos en los siguientes triángulos, al incentro denótalo con una i y al circuncentro con una c.

Triángulo equilátero



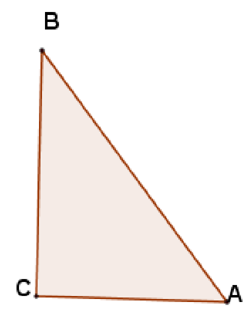
Triángulo isósceles



¿Qué observas en el triángulo equilátero? ____
____.
¿En el triángulo isósceles qué observas? ____
____.

Para concluir con esta acción construye, en el triángulo rectángulo que a continuación se dibuja; las líneas, puntos y circunferencias notables señalando los puntos notables con la letra inicial y escribe todo lo que observes.

Tus observaciones:
____
____



FIN DE LA ACCIÓN

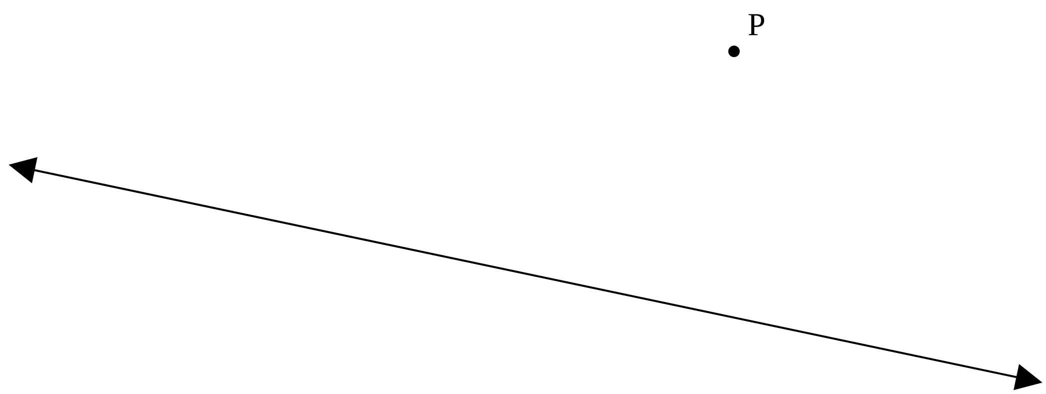
ACCIÓN 4

DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Objetivo: al concluir la acción, el alumno debe saber cómo determinar la distancia entre una recta y un punto dado.

AL ESTUDIANTE: anteriormente has visto que la distancia más corta que hay entre dos puntos viene dada por la longitud del segmento que los une, sin embargo, qué sucede si queremos determinar la distancia entre un punto y una recta. En esta acción veremos cómo se hace.

Considera la recta y el punto P de la figura siguiente. Coloca cuatro puntos sobre la recta, los cuales denotarás con las letras A, B, C y D. Posteriormente, traza los segmentos AP, BP, CP y DP.



Determina la longitud de cada uno de los segmentos trazados.

AP= ______________ BP= ______________ CP= _______________ DP= _______________

¿Cuál de todos los segmentos mide menos? ____

Compara tu respuesta con las de tus compañeros, ¿alguien obtuvo una medida más pequeña? ________. En caso de que sí, ¿Cuánto midió el segmento? ________________________________, ¿Consideras que se puede colocar otro punto, llamémosle F, sobre la recta de tal manera que la longitud del segmento FP sea la más pequeña posible? ________________ ¿Cómo lo harías? ____________________________
____
____
____

Ahora mide la longitud del segmento FP: ___________________, ¿mide menos que todos los demás segmentos? ______________. Compara tu respuesta con las de tus compañeros, ¿Todos obtuvieron la misma medida? ______________________________.

En efecto, para determinar el punto F, hay que trazar una recta perpendicular a la recta que pase por el punto P. La intersección de la perpendicular y la recta , será el punto F. Como has observado, el segmento que se encuentra sobre la perpendicular, cuyos extremos son los puntos F y P, tiene la longitud más pequeña que la de cualquier otro segmento que va de la recta al punto P. La longitud del segmento FP viene siendo la **distancia del punto P a la recta** .

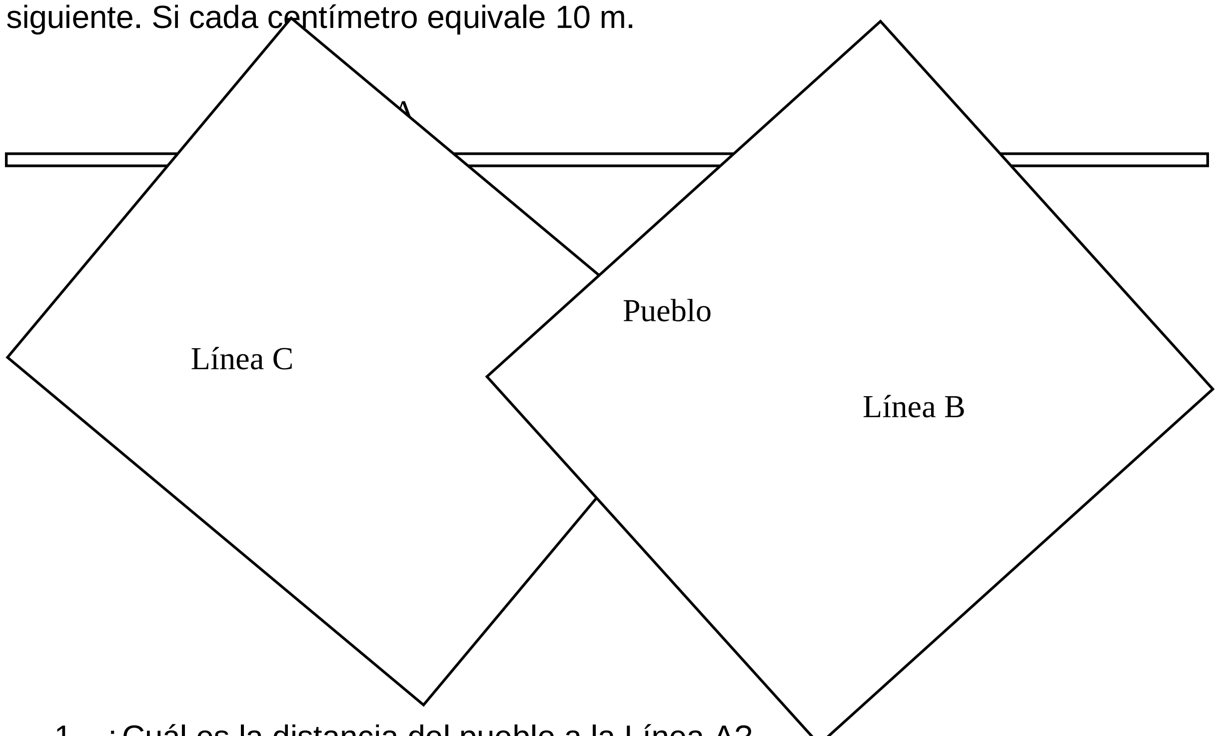
A continuación, escribe de manera precisa cómo podríamos definir la distancia de un punto P a una recta .

Definición de distancia de un punto a una recta.

____
____
____

Ahora planteamos el siguiente problema, para que apliques lo que has aprendido.

Un pueblo se encuentra entre tres vías del tren, como se muestra en el esquema siguiente. Si cada centímetro equivale 10 m.



1. ¿Cuál es la distancia del pueblo a la Línea A? ____________________________
2. ¿Cuál es la distancia del pueblo a la Línea B? ____________________________
3. ¿Cuál es la distancia del pueblo a la Línea C? ____________________________

Compara tu respuesta con la de tus compañeros.

FIN DE LA ACCIÓN

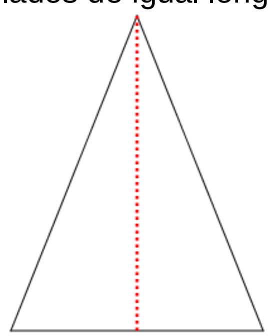
ACCIÓN 5

TEOREMA DEL TRIÁNGULO ISÓSCELES

Objetivo: al concluir la acción, el alumno comprender le teorema del triángulo isósceles y su recíproco.

AL ESTUDIANTE: En esta acción, estudiarás en qué consiste el teorema del triángulo isósceles y su recíproco.

1. En una hoja blanca, construye un triángulo isósceles y traza la altura comprendida por el vértice que forman lo lados de igual longitud y el lado opuesto a éste.



2. Recorta el triángulo y dobla la hoja a lo largo de la altura trazada.

   ¿Qué puedes afirmar de los ángulos internos del triángulo que se encuentran en los otros dos vértices? ______________________________

   Compara tu respuesta con la de tus compañeros.

En cualquier triángulo isósceles, ¿qué puedes afirmar de los ángulos internos opuestos a los lados congruentes? ______________________________

De lo observado en la actividad, se puede deducir un teorema muy importante en geometría, el cual se le conoce como el **Teorema del triángulo isósceles**. A continuación, redacta el teorema:

Teorema del triángulo isósceles.

____
____
____
____

Ahora bien, si dos ángulos internos de un triángulo son congruentes, ¿el triángulo es isósceles? __________________________, ¿cómo podrías justificar esto? Puedes utilizar la misma idea que la empleada para justificar el teorema anterior.

____
____
____
____

Con base en lo anterior, podemos enunciar el recíproco del Teorema del triángulo isósceles de la siguiente manera:

> *Si en un triángulo dos ángulos son congruentes, entonces los lados opuestos son congruentes, es decir el triángulo es isósceles.*

FIN DE LA ACCIÓN

ACTIVIDAD 4

PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS

Acción 1 Características de los polígonos

Objetivo: El alumno conocerá el tipo de polígonos según sus lados o según sus ángulos.

> **Al estudiante:** En las acciones anteriores ya conociste a los triángulos y algunas de sus propiedades. Ahora estudiaremos a las figuras según el número de lados o la medida de sus ángulos y algunas propiedades interesantes.

Empezaremos con una nota histórica de **Pitágoras**.

Nació en la Isla de Samos (Grecia), en el 570 a.C. y murió en Metaponto en el 469 a.C. Filósofo y matemático griego, fue el primero en demostrar el Teorema que lleva su nombre sobre la relación entre los lados de un triángulo. Fundó la escuela Pitagórica cuyo lema de esta fue "**Todo es número"** y su emblema el pentágono estrellado o pentagrama. El Pentagrama pitagórico se obtiene a partir de un pentágono regular trazado las diagonales que unen sus vértices no consecutivos. También a partir de tres triángulos isósceles cuyos ángulos iguales son el doble del ángulo desigual.

El estudio de los polígonos: las raíces de la palabra son "poli" que quiere decir muchos y "gonos" lados. Así que si nos fijamos en nuestro entorno encontraremos muchas figuras planas de muchos lados.

Menciona algunas figuras que observes en tu entorno que tengan varios lados:

____

¿Qué característica puedes observar en las figuras que describiste?

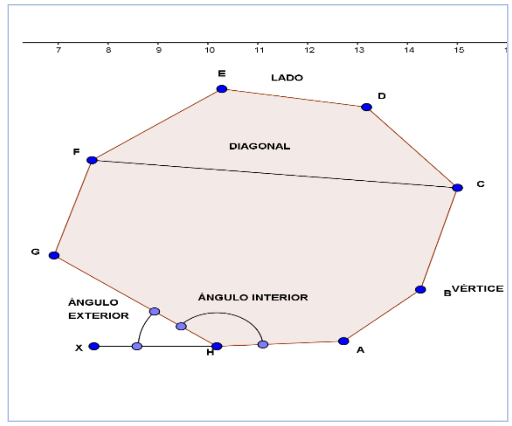
____

¿Cómo definirías un polígono? ________________________________

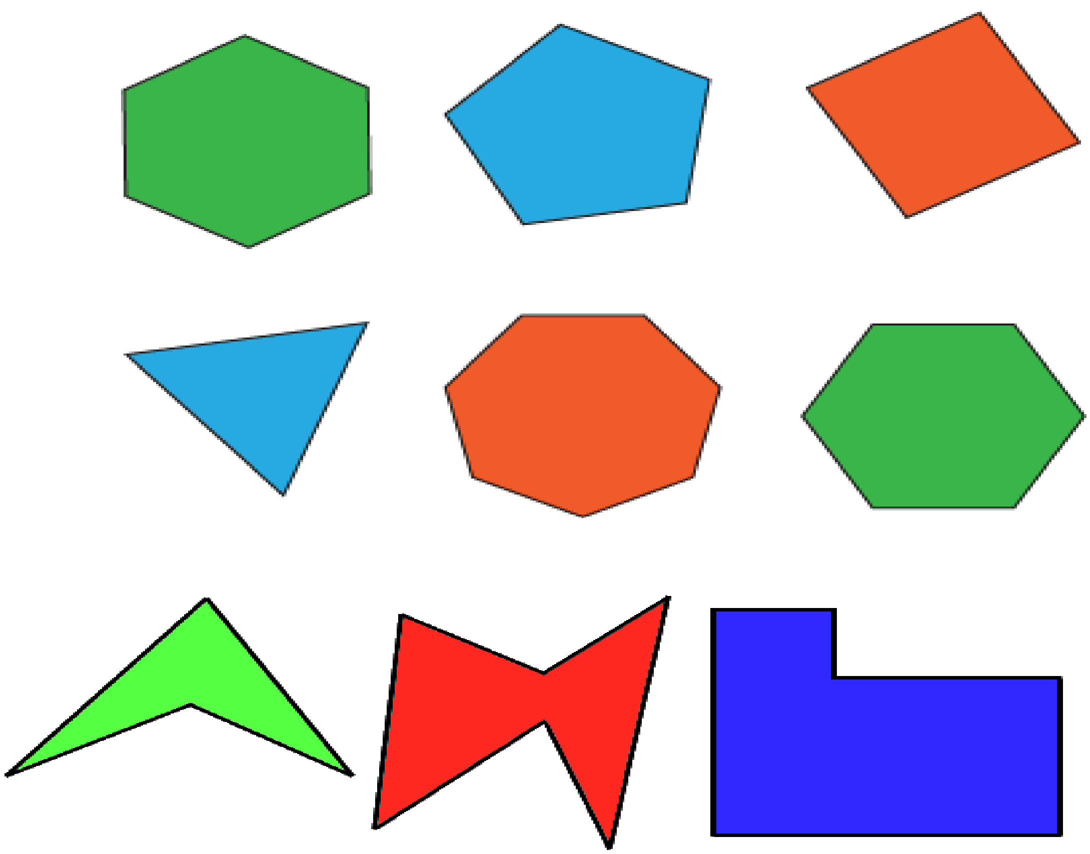
Podemos decir, un polígono es una región plana limitada por segmentos unidos en sus extremos.

Elementos de un polígono:

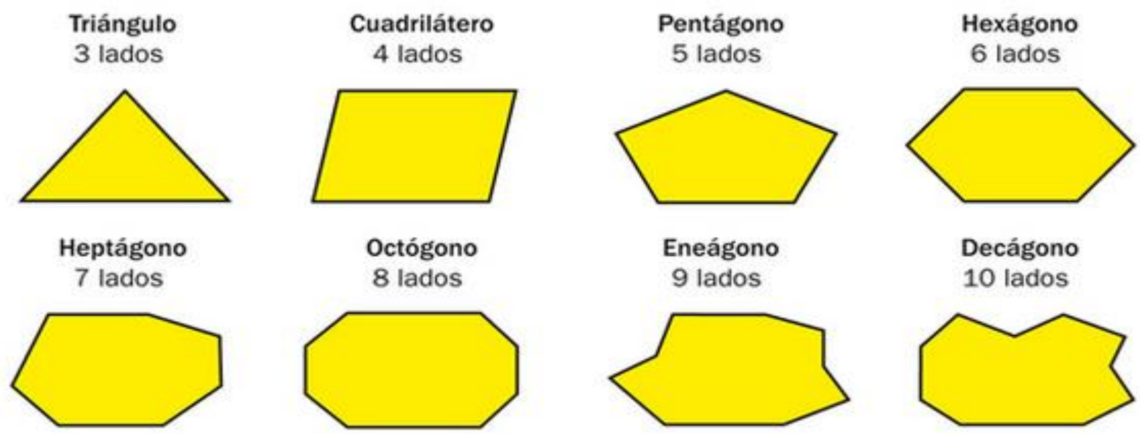
Lados: segmentos que lo limitan. AB, BC, CD, …
Vértices: puntos extremos de los lados. A, B, C, D, …
Diagonales: Segmentos que unen dos lados no consecutivos AC, AD, AE, AF, …
Ángulos interiores: son los formados por dos lados contiguos ABC, BCD, …
Ángulos exteriores o externos: son los suplementarios de los ángulos interiores.



Clasificación de los polígonos según sus lados:
Los polígonos derivan sus nombres por el número de lados de este.
Como se llaman cada uno de los siguientes polígonos:

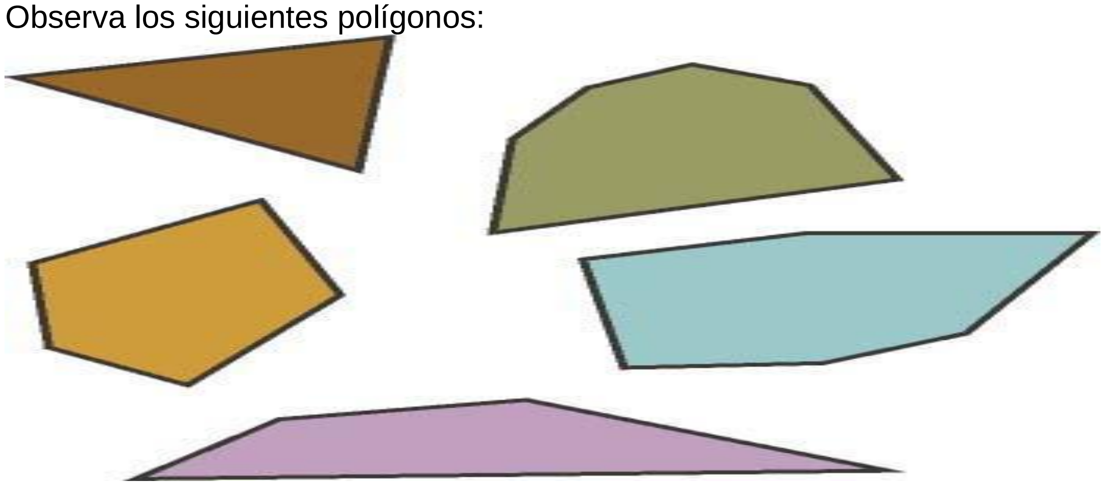


Nombres de los polígonos según sus **lados.**



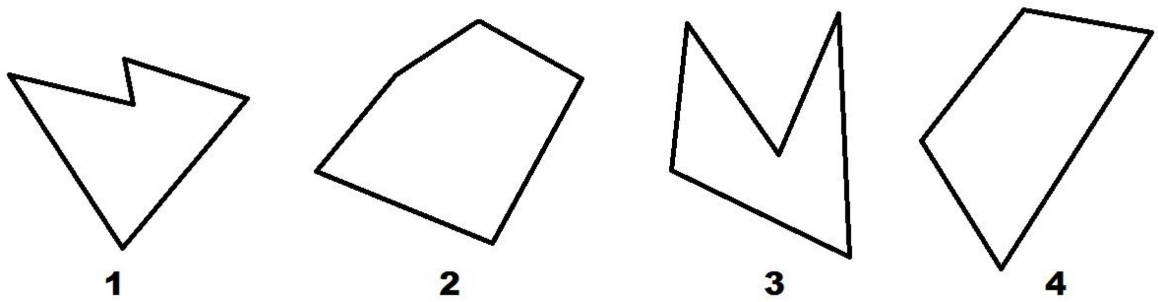
Clasificación según la medida de sus **ángulos** interiores.

Observa los siguientes polígonos:



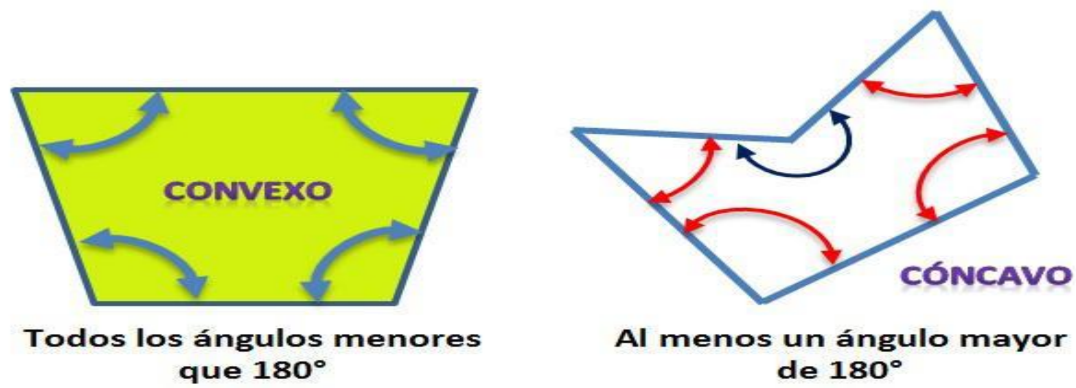
¿Todos los ángulos interiores son menores de 180^0? _______

Ahora observa en los siguientes polígonos.

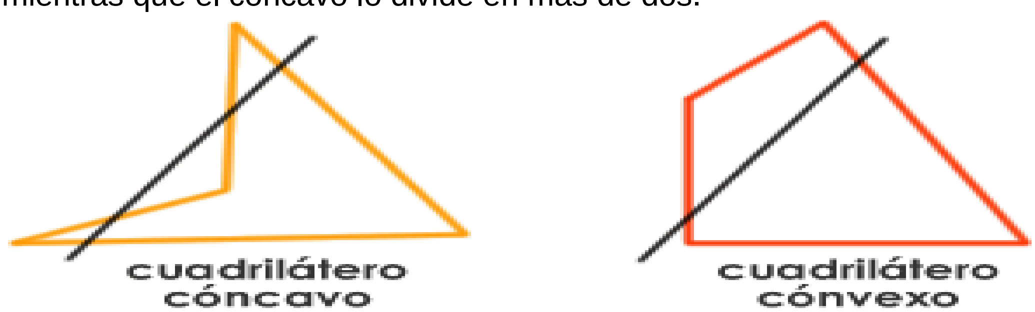


¿Qué diferencias encuentras con los anteriores? ______________________________

Los polígonos 2 y 4 tienen todos sus ángulos interiores menores de 180^0. Los polígonos 1 y 3 tienen un ángulo mayor de 180^0.



Ahora clasificamos a los polígonos en cóncavos y convexos, como podemos ver en las imágenes anteriores.
Los polígonos que tienen todos sus ángulos internos menores de 180^0 se llaman **convexos**.
Los polígonos que tienen al menos un ángulo mayor de 180^0 se llaman **cóncavos**.
También podemos verificar geométricamente si es cóncavo o convexo si trazamos una recta que intersecte al polígono y en el caso de ser convexo lo divide en dos partes, mientras que el cóncavo lo divide en más de dos.



Clasificación de los polígonos.
Clasificación de los polígonos según sus lados. Si tienen todos sus lados iguales, de la misma medida, se llaman polígonos **equiláteros.**

En el siguiente espacio dibuja dos polígonos equiláteros:

Clasificación de los polígonos según sus ángulos. Si tienen todos los ángulos iguales o sea de la misma medida, se llaman polígonos **equiángulos.**
En el siguiente espacio dibuja dos polígonos equiángulos:

FIN DE LA ACCIÓN

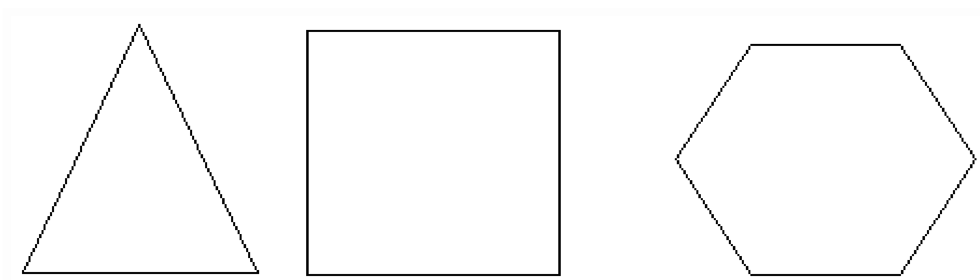
Acción 2
Características de los polígonos según sus lados.

Objetivo: El alumno conocerá el tipo de polígonos según sus lados.

Al estudiante: En la acción anterior ya conociste a los polígonos cóncavos y convexos y algunas de sus características. Ahora estudiaremos a los polígonos según el número de lados y algunas propiedades interesantes.

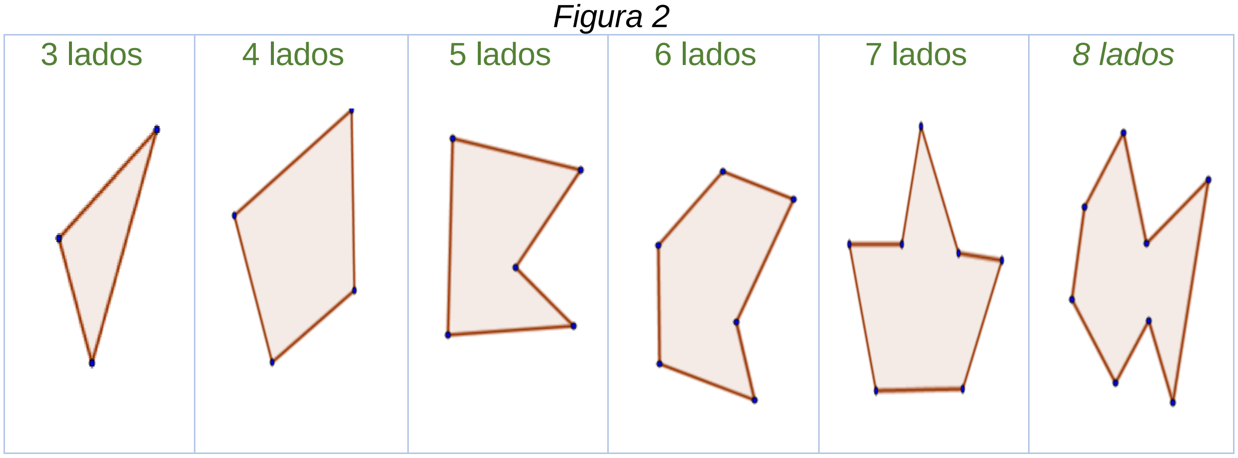
Como ya vimos en la Acción anterior los polígonos pueden ser cóncavos o convexos, ahora estudiaremos a los polígonos por el número de lados.
Recordando: Un **polígono**, es una figura plana y cerrada limitada por segmentos.
Mostremos algunos ejemplos:

Figura 1



Triángulo Cuadrado Hexágono

Figura 2



triángulo	cuadrilátero	pentágono	hexágono	heptágono	octágono

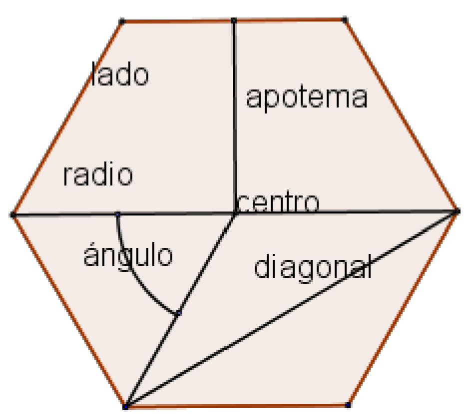
¿Qué diferencias encuentras entre las *figuras 1 y 2*? ______________________
Bueno podríamos decir que algunos polígonos de la *figura 2* son cóncavos y otros convexos, además de eso tenemos que los polígonos son irregulares.
Mientras que en la *figura 1* los polígonos son regulares.
¿Qué quiere decir que un polígono sea regular o irregular? ____________________
____
Como podemos observar en la *figura 1*, se tiene un triángulo un cuadrado y un hexágono. En cada caso se tiene lo siguiente:
El triángulo es equilátero o sea tiene sus tres lados y sus tres ángulos iguales.
El cuadrado tiene sus cuatro lados iguales y sus ángulos rectos.
El hexágono tiene____

Con lo anterior concluimos que estos tres polígonos son regulares.
¿Cómo podemos definir a los polígonos regulares?
____

En el caso de la *figura 2*, tenemos un triángulo, cuadrilátero, pentágono, hexágono, heptágono y octágono, que como podemos observar **no** tienen ni sus ángulos ni sus lados iguales, a estos polígonos los llamaremos irregulares. También se cumple que, en un polígono irregular sus vértices no están circunscritos en una circunferencia.

Ahora estudiaremos las propiedades de los **polígonos regulares.**

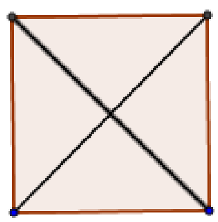
Un polígono regular tiene todos sus lados y todos sus ángulos iguales.
Se distinguen los siguientes elementos en estos polígonos.



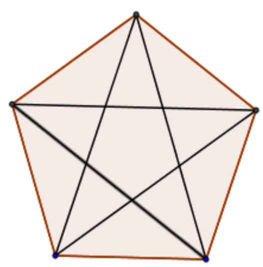
Definición de los elementos del polígono:

Ángulo: el formado por dos radios consecutivos.
Centro: punto del que equidistan todos los vértices.
Apotema: segmento que une el centro con el punto medio de cualquier lado.
Diagonal: segmento que une dos vértices no consecutivos.
Lados: segmentos que delimitan al polígono.
Radio: segmento que une el centro con cualquiera de los vértices.

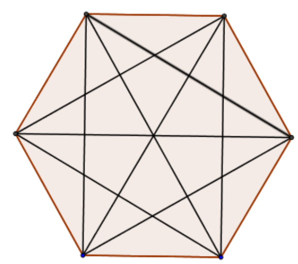
Observa las siguientes figuras y determina el número de diagonales:



Cuadrado

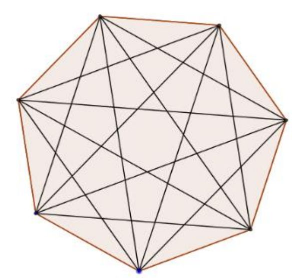


Pentágono



Hexágono

En el **cuadrado** de cada vértice sale una diagonal.
En el **pentágono** de cada vértice salen dos diagonales.
¿En el **hexágono** de cada vértice salen ______diagonales?
¿En el **heptágono** de cada vértice salen ______diagonales?
Si tenemos un polígono de "**n lados**" entonces tenemos "**n vértices**"
¿Cuántas diagonales salen de cada vértice? ________
¿Cuántas diagonales, tiene cada polígono? _________



Heptágono

Observa:

Polígono	No. de Vértices	No. de diagonales de cada vértice	No. de diagonales En cada polígono
Cuadrado	cuatro	4-3=1	2
Pentágono	Cinco	5-3=2	5

Hexágono	Seis	6-3=3	$\frac{6(6-3)}{2} = 9$
Heptágono	Siete	7-3=4	$\frac{7(7-3)}{2} = 14$

¿Cuántas diagonales, tiene un octágono? ________________________

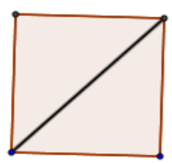
¿Cuántas diagonales, tiene un eneágono? ________________________

¿Cuántas diagonales, tiene un decágono? ________________________

Como ves, es más fácil contar las diagonales que salen de un vértice.

Ángulos y diagonales de un polígono.

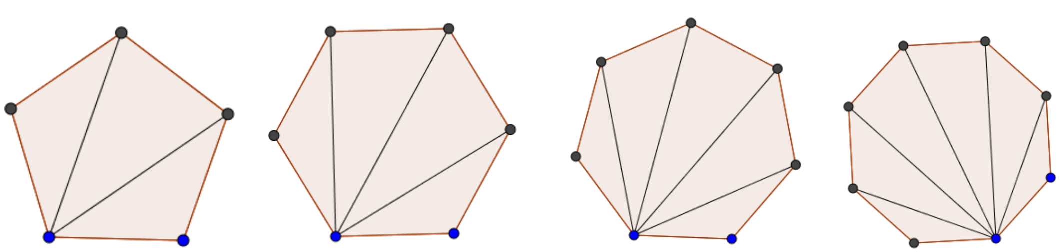
Observemos el cuadrado: si trazamos la diagonal se forman dos triángulos y como ya se vio los ángulos interiores de un triángulo suman 180^0, como se forman dos triángulos tendremos que las sumas de los ángulos del cuadrado suman 360^0.



Llena la siguiente tabla**:**

Lados	**Diagonales desde un vértice**	**Triángulos que se forman**	**Ángulos que se forman**
No.	No.	No.	SUMA
5	**2**	**3**	**540^0**
6			
7		**5**	
8			**1080**
9			

La suma de los ángulos interiores de un polígono de n lados es $(n-2)180^0$.



ÁREAS Y PERÍMETROS

Calcular el área y perímetro de los polígonos regulares anteriores.
Perímetro y área del cuadrado.
El perímetro de un cuadrado es: cuatro veces la longitud de su lado.

$$P = a + a + a + a = 4a$$

El área de un cuadrado es su lado al cuadrado.

$$A = a * a = a^2$$

Ahora indica como calcular el perímetro y área de los siguientes polígonos.

Polígono	No. de lados	perímetro	área	magnitud
Cuadrado	cuatro	$P = 4a$	$A = a^2$	$a = 3$
Pentágono	Cinco	$P = 5b$		$b = 6;\ a = 4$
Hexágono	Seis	$P = 6b$		$b = 6;\ a = 4$
Heptágono	Siete	$P = 7b$		$b = 6;\ a = 4$
Decágono				$b = 6;\ a = 4$
Dodecágono				$b = 6;\ a = 4$

Área del pentágono

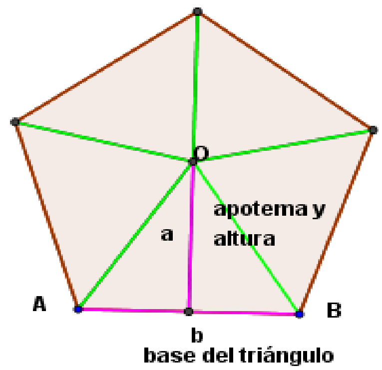
Área de triángulo ABO

$$\frac{ba}{2} = b\frac{a}{2}$$

como son cinco triángulos entonces $5b = P$ donde P es el perímetro del pentágono

Luego el área del polígono queda expresada por:

$$A = \frac{Pa}{2}$$

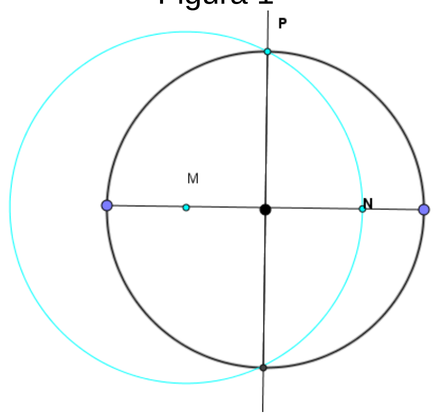


CONSRUCCIÓN DE ALGUNOS POLÍGONOS REGULARES CON REGLA Y COMPÁS

Construcción de un **pentágono** y **decágono** con regla y compás.

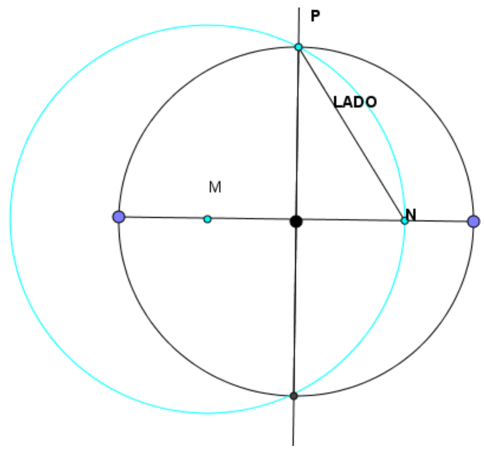
1. Empezamos trazando una circunferencia.
2. Ahora trazamos dos perpendiculares que se corten en el centro de la circunferencia.
3. Encontramos el punto medio M indicado en la figura 1.

Figura 1



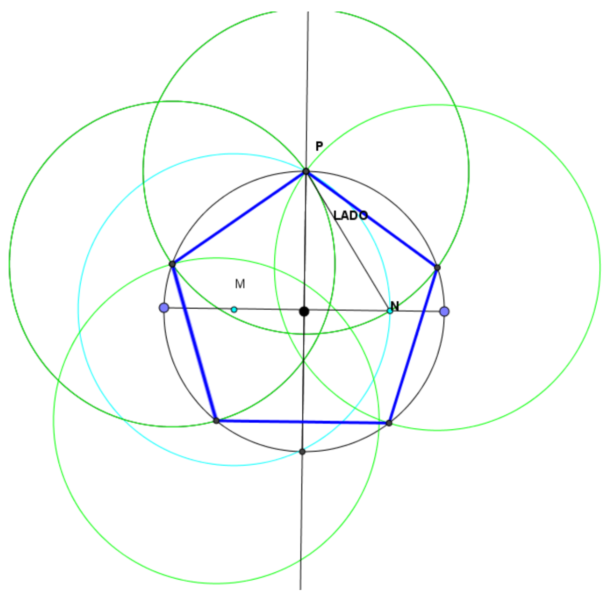
4. Ahora apoyándonos en M abrimos el compás hasta que corte la intersección de la circunferencia y la recta vertical.
5. Con este mismo radio, y apoyándonos en M cortamos la recta horizontal en el punto N como se muestra en la figura 1.
6. La distancia entre N y P es la longitud del lado del pentágono regular. M P

Figura 2



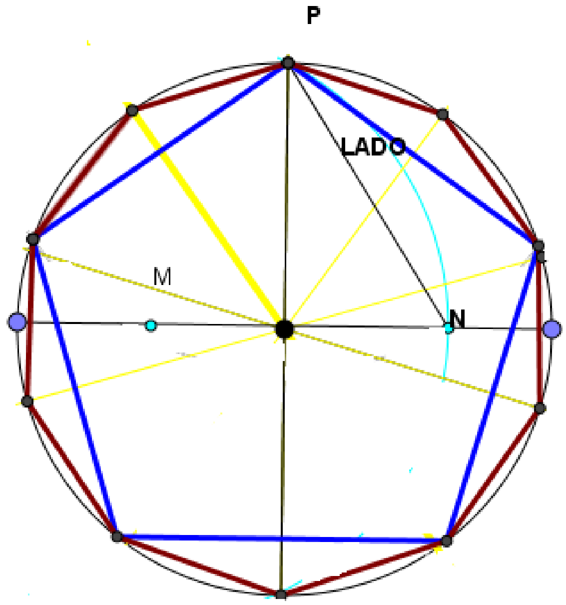
7. Medimos esta distancia con el compás y la utilizamos para encontrar los demás vértices del pentágono. Como en la figura 3.

Figura 3



8. Ya construido el pentágono se trazan las apotemas (perpendiculares al punto medio de cada lado del pentágono) y la intersección con la circunferencia nos determina los vértices del decágono.

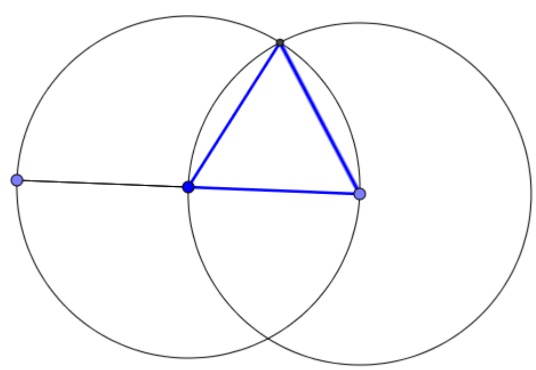
Figura 4



Ejercicios:

Construye con regla y compás o utilizando Geogebra los siguientes polígonos.

1. Construye un triángulo equilátero. Como se muestra en la figura de abajo. Explica la construcción.



2. Similar al ejercicio anterior construye un cuadrado
3. Construye un Hexágono regular
4. Construye un heptágono regular

FIN DE LA ACCIÓN

Acción 3
Polígonos Irregulares

Objetivo: El alumno identificará los polígonos irregulares y calculará el área descomponiendo el polígono según las formas.

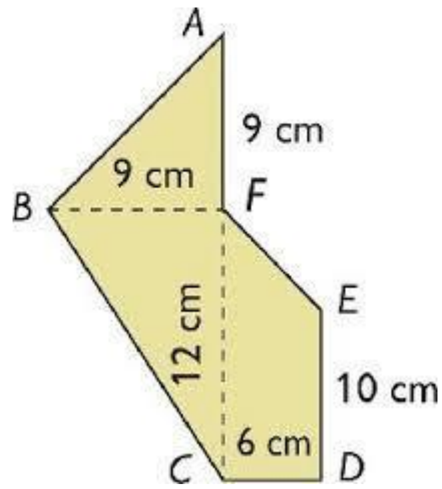
Al estudiante: En la acción anterior ya conociste a los polígonos regulares. Ahora estudiaremos a los polígonos irregulares según sus formas y la descomposición en otros polígonos conocidos para determinar perímetros o áreas.

Perímetros y Áreas

El método más sencillo para hallar el área de una figura plana es descomponerla en otras figuras de áreas conocidas o que podamos calcular fácilmente a partir de sus elementos (lados, ángulos, etc).

El polígono de la figura 1, se ha descompuesto en dos triángulos y un cuadrilátero en donde se muestran algunas medidas. El área de la figura se determina de la siguiente manera: A= área del triángulo ABF+ área del triángulo BCF+ área del cuadrilátero CDEF

Figura 1



$$A = \frac{81}{2} + \frac{108}{2} + \frac{132}{2} = \frac{321}{2} = 160.5$$

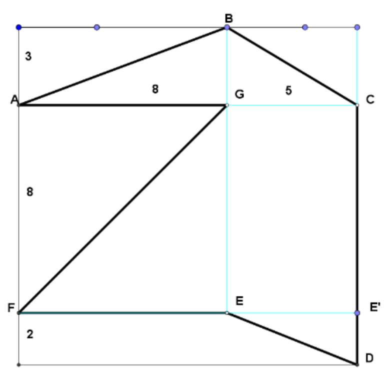
Figura 2

En la figura 2, se muestra un polígono y algunas medidas, determina su perímetro y su área.

Para determinar el perímetro, primero determina la magnitud de cada lado del polígono.

Segmentos:

AB=_____ BC=_____
CD=_____ DE=_____
EF=_____ FG=_____
GA=_____ P=______

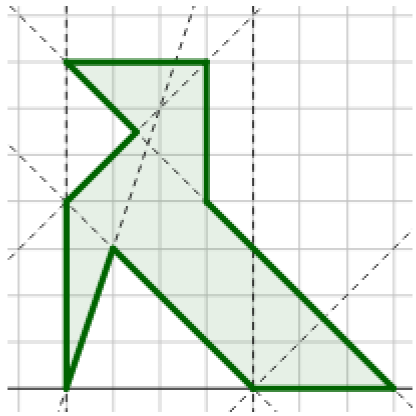


Para calcular el área del polígono podemos considerar las siguientes figuras:

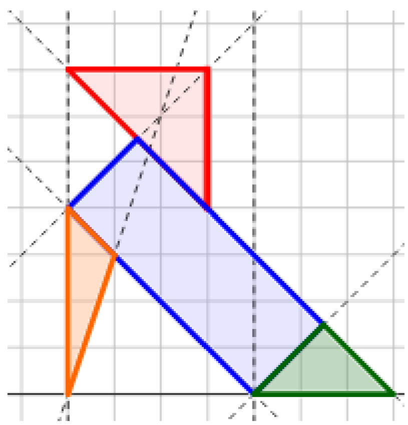
El triángulo ABC	Área: ____________	Área total = _______
El triángulo EFG	Área: ____________	
El triángulo EE'D	Área: ____________	
El cuadrilátero EE'CG	Área: ____________	

Ejemplo 1.

Calcular el área de la siguiente pajarita con la ayuda de la cuadrícula (de 1cm x 1cm):



Descomponemos la figura en polígonos más sencillos como se muestra en la figura:



Ahora hay que calcular el área de cada uno de ellos: **A. Triángulo rojo**

Es un triángulo rectángulo con catetos de 3cm.

Como los catetos son la altura y la base,

el área es:

$$A_{rojo} = \frac{3 \cdot 3}{2} = \frac{9}{2} = 4,5\ cm^2$$

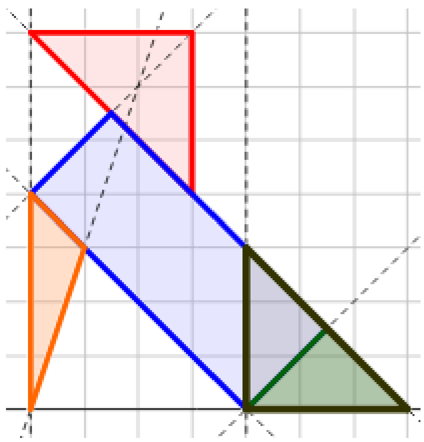
B. Triángulo naranja

La altura es 1cm y la base es 4cm. Su área es

$$A_{naranja} = \frac{1 \cdot 4}{2}$$
$$= 2\ cm^2$$

C. Triángulo verde

Usaremos un triángulo rectángulo auxiliar (negro) para calcular el área del verde:



El triángulo negro está formado por dos triángulos como el verde, por lo que el área del verde es la mitad del área del negro:

El triángulo negro tiene 3cm de altura y de base, así que su área es

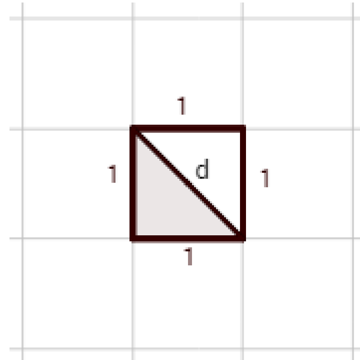
$$A_{negro} = \frac{3 \cdot 3}{2}$$
$$= \frac{9}{2} = 4,5\ cm^2$$

Luego el área del triángulo verde es

$$A_{verde} = 2,25\ cm^2$$

D. Rectángulo azul

Los cuadrados de la cuadrícula son de lado 1cm.



La diagonal, *d*, de estos cuadrados se puede calcular aplicando Pitágoras:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$
$$\downarrow$$
$$d = \sqrt{2}$$

Obsérvese que los lados del rectángulo azul están formados por 4 y 1,5 diagonales de los cuadrados de la cuadrícula.

El área de rectángulo azul es

$$A = \left(4 \cdot \sqrt{2}\right) \cdot \left(1,5 \cdot \sqrt{2}\right) =$$
$$= \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \cdot 1,5$$
$$= 2 \cdot 4 \cdot 1,5$$
$$= 12\ cm^2$$

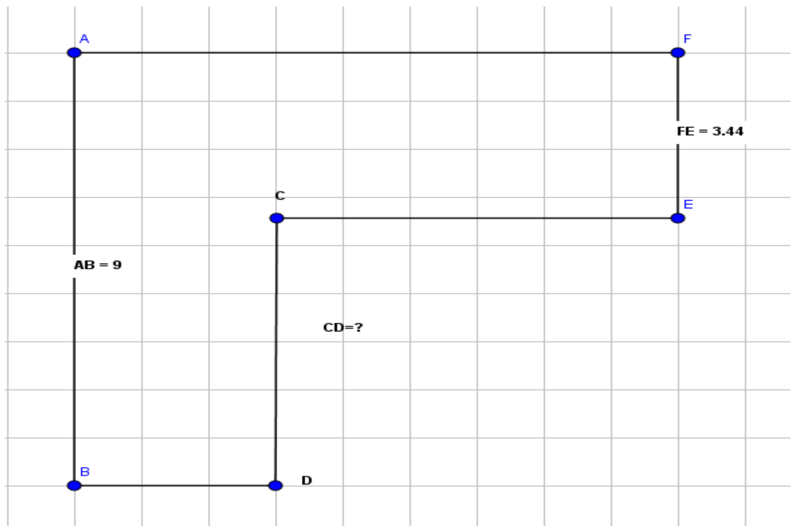
Finalmente, calculamos el área total de la pajarita sumando todas las áreas:

$$A = 4,5 + 2 + 2,25 + 12 =$$
$$= 20,75\ cm^2$$

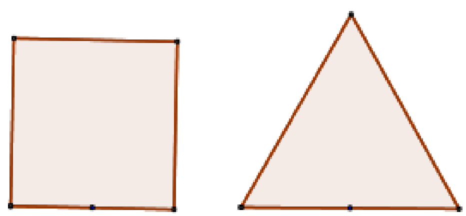
Resuelve los siguientes problemas:

1. En una ciudad hay un parque que tiene forma de pentágono irregular, los lados miden respectivamente, 45; 39; 29; 17 y 39 metros. ¿Qué perímetro tiene el parque? Y ¿Cuál es su área?

2. En la siguiente figura determina el perímetro y el área.



3. Determinar el lado de un triángulo equilátero cuyo perímetro es igual al de un cuadrado de 6 cm de lado. ¿Serán iguales sus áreas?



FIN DE LA ACCIÓN

Acción 4
Fórmula de Herón

Objetivo: El alumno distinguirá como debe usar las fórmulas para calcular las áreas de los polígonos regulares e irregulares.

> **Al estudiante:** En las acciones anteriores ya conociste los tipos de polígonos sus características y algunas propiedades. Ahora estudiaremos como determinar el área de los polígonos conociendo su perímetro a través de la fórmula de un matemático griego llamado Herón.

Comenzaremos nuestro estudio con una nota histórica bibliográfica.

Herón de Alejandría

Matemático y astrónomo (126 a.C; 50 a.C Alejandría, Egipto)

La expresión matemática más conocida de Herón es la fórmula para determinar el área de un triángulo, conocidos sus lados. Algo realmente útil en aquellos tiempos. Si bien parece que es conocida por Arquímedes, la primera demostración que nos ha llegado, figura en la Métrica uno de los trazados más famosos de Herón. El teorema nos garantiza, conociendo los lados de un triángulo, conocer su área, mediante la expresión:

$$Area = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Donde ▯, ▯ ▯ ▯ son los lados del triángulo y ▯ es la mitad del perímetro del mismo.

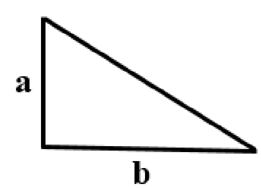
También se conocen al triángulo heroniano al que tiene lados enteros y área entera. Triángulos rectángulos con lados y área entera ya se conocían mucho antes de la época de Herón, pero a él se le atribuye el descubrimiento del triángulo de lados 13, 14, 15 y área 84 (no es rectángulo, pero tiene lados y área entera). El nombre de los triángulos heronianos es un homenaje a Herón por este descubrimiento.

Comencemos nuestro estudio analizando como calcular el área de un triángulo según el tipo de triángulo y los datos conocidos.

A. Triángulo rectángulo

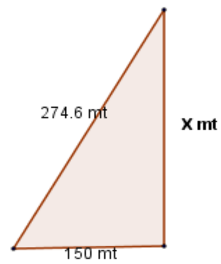
Si conocemos los lados del triángulo (que serían los catetos como se muestra en la figura) **a** sería la altura y **b** la base de ahí que;

$$Área = \frac{ab}{2}$$



Ejemplo 1.

A 150 metros del pie de una torre encuentra sujeta una cuerda que se eleva hasta la punta de la torre. Sabemos que la cuerda tiene una longitud de 274.6 metros. ¿Cuánto vale la altura de la torre? ¿Cuál es el área del triángulo que se forma? Para contestar estas preguntas primero trazamos la figura que muestra las condiciones del problema.

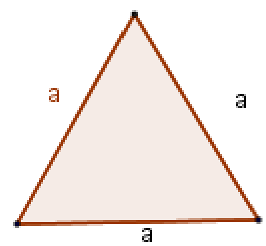


Para calcular la altura **x** de la torre usamos el teorema de Pitágoras

$$x^2 + 150^2 = (274.6)^2$$
$$x^2 = (274.6)^2 - 150^2$$
$$x^2 = 75405.16 - 22500$$
$$x = \sqrt{52905.16} = 230mt$$

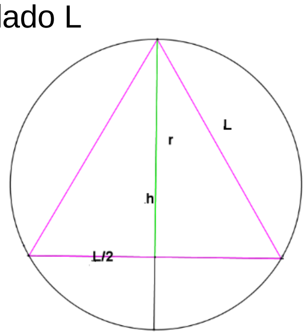
Así que la altura de la torre es de 230mt
Para calcular el área tenemos la base de 150mt y la altura de 230mt
Así que usando la fórmula tenemos $A = \frac{(150)(230)}{2} = 17250$

B. Triángulo equilátero



$$Área = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$
Siendo a el lado

Ejemplo 2
Hallar el área de un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de radio 6.
El centro de la circunferencia es el baricentro por lo tanto se cumple la siguiente relación $r = \frac{2}{3}h$ y como r=6 entonces $6 = \frac{2}{3}h$ de ahí que h=9
Como podemos ver en la figura se forma un triángulo rectángulo y para encontrar el lado L



Usaremos el teorema de Pitágoras

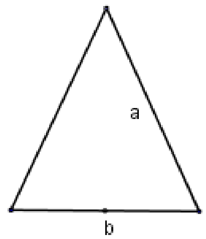
$$L^2 = 9^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2$$
$$L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2 = 81$$
$$L^2 - \frac{L^2}{4} = 81$$
$$\boldsymbol{\frac{3L^2}{4} = 81 \qquad L^2 = 108}$$

Así que $A = \frac{108\sqrt{3}}{4} = 46.76$

C. Triángulo isósceles

Caso 1

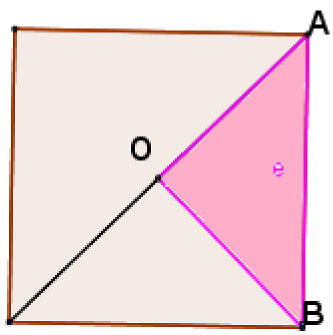
Si conocemos uno de los lados iguales y la base, se tiene:



$$Área = \frac{b\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}}{2}$$

Ejemplo 3

Encontrar el área del triángulo OAB, que se muestra en la figura. La diagonal del cuadrado es de 4 unidades.



Solución:

Como la diagonal del cuadrado vale 4 unidades el segmento OA y OB es igual a 2 unidades. Utilizando el Teorema de Pitágoras para determinar el segmento AB que llamaremos L nos queda:

$$L^2 = 2^2 + 2^2$$

$$L^2 = 8 \qquad L = \sqrt{8}$$

$$A = \frac{\sqrt{8}}{2}\sqrt{2^2 - \frac{\sqrt{8}^2}{4}}$$

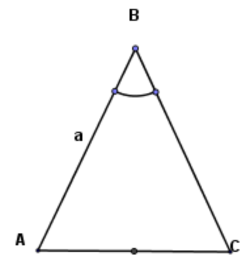
$$A = \frac{\sqrt{8}}{2}\sqrt{4 - \frac{8}{4}} = \frac{\sqrt{8}}{2}\sqrt{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

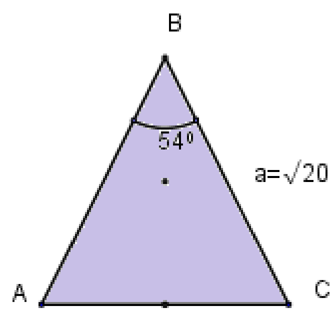
Caso 2

Si conocemos, ⍰ uno de los lados iguales y el ángulo formado por estos lados se tiene:

$$Área = \frac{a^2}{2} senB$$



Ejemplo 4
Si tenemos un triángulo isósceles como se muestra en la figura:

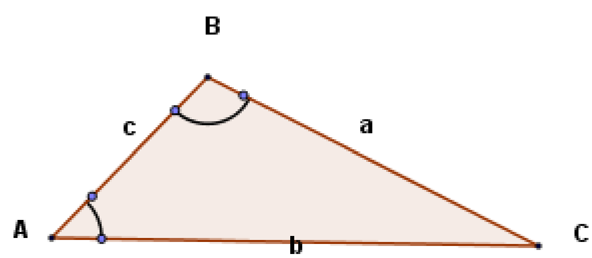


¿Cuánto vale el área del triángulo?
Para resolver este ejercicio sustituimos los valores en la fórmula.

$$A = \frac{\left(\sqrt{20}\right)^2}{2} sen(54^0)$$

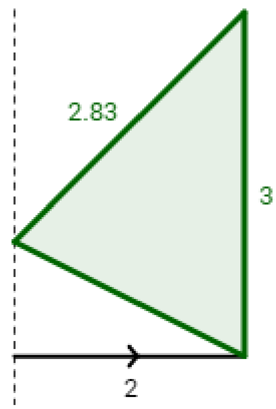
$$A = (10)(0.80) = 8$$

D. Escaleno o un triángulo cualquiera.



Caso 1. Si conocemos la base y la altura: $\text{Área} = \frac{\text{bh}}{2}$

Ejemplo 5
Hallar el área del triángulo que se muestra en la figura:



Al observar la figura se tiene que un lado vale 3U,
También se tiene que 2U es la altura del triángulo

Por lo tanto, el área es:

$$A = \frac{bh}{2}$$

Así que, al sustituir el área es:

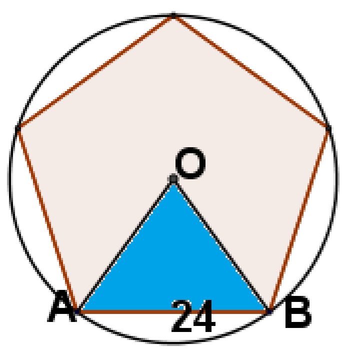
$$A = \frac{(2)(3)}{2} = 3U$$

Caso 2. Conocemos el lado **a** y los ángulos B y C

$$\text{Área} = \frac{\text{a}^2\text{senBsenC}}{2\text{sen}(\text{B}+\text{C})}$$

Ejemplo 6

El lado de un pentágono regular mide 24cm. Calcula el área del triángulo que se forma en la base.



Como vemos en la figura el ΔAOB tiene base 24cm. Los segmentos AO y OB son radios por lo tanto los ángulos de la base son iguales y su medida es de 54º (como se vio en la acción 2)

$$Área = \frac{24^2(sen54)(sen54)}{2sen(54+54)}$$

$$Área = \frac{(576)(0.8090)(0.8090)}{2(0.951056)} = 198.1906$$

Caso 3. Conocemos el lado **b** y los ángulos A y C

$$\text{Área} = \frac{\text{b}^2\text{senAsenC}}{2\text{sen}(\text{A}+\text{C})}$$

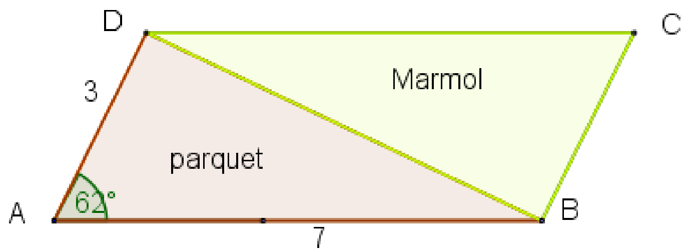
Caso 4. Conocemos el lado **c** y los ángulos A y B

$$Área = \frac{c^2 senAsenB}{2sen(A+B)}$$

Caso 5. Conocemos los lados **a** y **b** y el ángulo C

$$Área = \frac{(ab)senC}{2}$$

Ejemplo 7
Se desea poner un piso para una superficie en forma de paralelogramo como se muestra en la figura.



¿Qué cantidad de cada material se necesita?

Para resolver este problema necesitamos calcular el área de los triángulos ABD y BCD. También podemos observar que ΔABD≈ΔBCD
Para calcular el área del ΔABD aplicamos la expresión:

$$Área = \frac{(ab)senC}{2}$$

Así que

$$Área = \frac{(3)(7)sen62}{2}$$

$$A = \frac{(21)(0.882945)}{2}$$

$$= \frac{18.5418}{2}$$

$$= 9.27$$

La conclusión es que se requiere de $9.27m^2$ de parquet y $9.27m^2$ de mármol

Caso 6. Conocemos los lados **a** y **c** y el ángulo B

$$Área = \frac{(ac)senB}{2}$$

Caso 7. Conocemos los lados **b** y **c** y el ángulo A

$$Área = \frac{(bc)senA}{2}$$

Caso 8. Conocemos los lados **a, b** y **c**
Esta expresión es conocida como la **fórmula de Herón**.

$$\boldsymbol{Área = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Donde $\boldsymbol{p}$ es el semiperimetro del triángulo $\boldsymbol{p = \frac{a+b+c}{2}}$

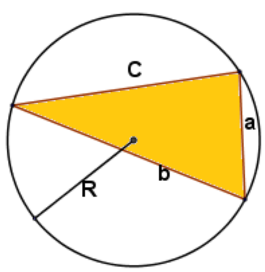
Ejercicios:

Aplica la fórmula de Herón para hallar el área de cada uno de estos triángulos de lados:

a) 13, 14, 15
b) 5, 5, 6
c) 13, 20, 21
d) 25, 34, 39

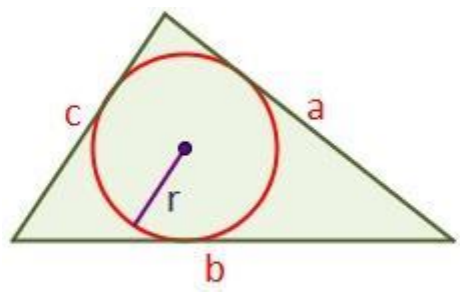
Caso 9. A partir de la **fórmula de Herón** tenemos otro procedimiento para hallar el área de un triángulo cualquiera.

Un triángulo inscrito en una circunferencia, el centro de la circunferencia es el circuncentro, ¡lo recuerdas! de radio R como se muestra en la figura.



$$\acute{A}rea = \frac{a * b * c}{4R}$$

Caso 10. Igualmente, a partir de la **fórmula de Herón** disponemos de un procedimiento más. Para calcular el área de un triángulo, pero ahora a partir de la circunferencia de radio ***r*** inscrita en el triángulo. El centro de la circunferencia es el incentro.



$$\acute{A}rea = p * r$$

Siendo r el radio de la circunferencia

Y

p el semiperímetro

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

del triángulo

FIN DE LA ACCIÓN

ACTIVIDAD 5

ACCIÓN 1

CÍRCULO Y CIRCUNFERENCIA

Objetivo: al concluir la acción, el alumno deberá haber aprendido a identificar las líneas notables de la circunferencia, a localizar su centro y a aproximar el perímetro y área del círculo.

AL ESTUDIANTE: vas a hacer construcciones importantes que se relacionan con la circunferencia, así como localizar los puntos de tangencia, el centro de un círculo dado y por supuesto, a calcular el perímetro y el área.

LA CIRCUNFERENCIA

Aparte de los polígonos, una de las figuras geométricas que tienen un papel importante en la geometría plana es la circunferencia, ¿Qué es una circunferencia? ____________
____
¿Qué información como mínimo necesitas para trazar una circunferencia? ___________
____

Dibuja una circunferencia con centro en el punto C que está abajo y que tenga como radio 4cm.

⊕

C

La figura que se forma con todos los puntos de un plano que están a la misma distancia de un punto fijo se llama ***CIRCUNFERENCIA***, el punto fijo se llama ***CENTRO*** y la distancia que siempre es la misma se llama ***RADIO*** de la circunferencia. El instrumento para dibujar circunferencias bien elaboradas es el compás.

De acuerdo con la definición de la circunferencia, ¿el centro de la circunferencia pertenece a la circunferencia? (argumente tu respuesta) ________________________
____.

¿El radio de una circunferencia es parte de la circunferencia? (argumenta tu respuesta)
____

El radio de una circunferencia es un número (es la longitud de los segmentos que van del centro a un punto de la circunferencia). Pero también a cualquier segmento con extremos en el centro y sobre la circunferencia también se dice que es un radio; o sea que la palabra radio tiene dos significados: ***el radio*** como una longitud y ***un radio*** como un segmento.

Lee cuidadosamente la definición de circunferencia y razona la respuesta a la siguiente pregunta: ¿el radio, o un radio y el centro de una circunferencia pertenecen a la circunferencia? ______. Explica tu respuesta ________________________________
____.

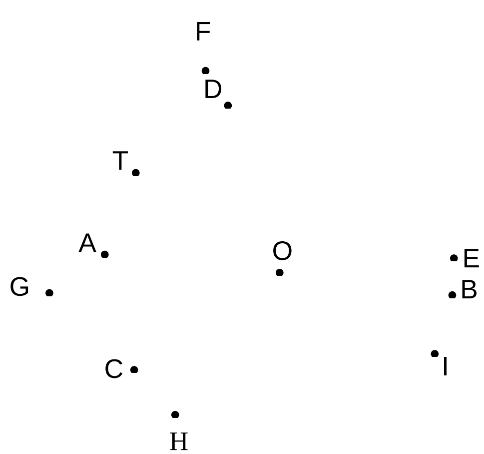
Los puntos de un plano que están a la misma distancia de un punto fijo son los que conforman la circunferencia, por lo tanto, el radio no es parte de la circunferencia porque no es un punto, es un número que representa la longitud de un segmento o es un segmento y el centro si es un punto, pero su distancia es cero con el mismo, por lo que tampoco forma parte de la circunferencia. En pocas palabras decimos que la circunferencia es el “aro” de puntos que se forman a la misma distancia alrededor del centro. En síntesis, el centro y el radio no forman parte de la circunferencia.

ARCO, SEGMENTOS, RECTAS Y ÁNGULOS NOTABLES EN LA CIRCUNFERENCIA.

A continuación, damos las siguientes definiciones:

- Arco: es la parte de una circunferencia delimitada por dos puntos.
- Cuerda: es un segmento con extremos en dos puntos de la circunferencia.
- Diámetro: es una cuerda que pasa por el centro de la circunferencia. Es una de las cuerdas más grandes que unen dos puntos de la circunferencia.
- Secante: es una recta que pasa por dos puntos de la circunferencia.
- Semicircunferencia: es un arco igual a la mitad de la circunferencia.
- Tangente: es una línea recta que tiene sólo un punto en común con la circunferencia.

En relación con la siguiente circunferencia nombra con las correspondientes letras el concepto que se indica en la lista de la derecha, usando para el arco el señalamiento curvo “)” arriba de las letras que lo conforman, para un segmento y para una recta ya sabes que los señalamientos son “–” y “↔”. Y dentro del paréntesis escribe “si” si el concepto forma parte de la circunferencia y “no” si es un concepto que únicamente se relaciona con ella.



Arco ________ (   )

Centro ________ (   )

Secante ________ (   )

Diámetro ________ (   )

Cuerda ________ (   )

Tangente ________ (   )

Radio ________ (   )

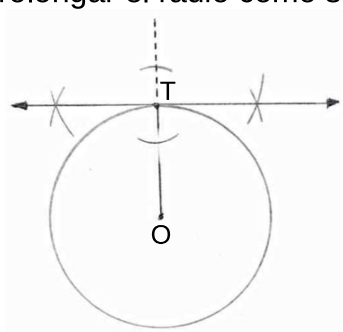
Semicircunferencia ________ (   )

Punto de tangencia ________ (   )

Todos estos elementos relativos a la circunferencia son fáciles de dibujar, el único que requiere de la regla y el compás es la recta tangente, los demás únicamente se trazan con la regla.

Por eso vamos a atender el trazo de la recta tangente a la circunferencia en dos situaciones: cuando el punto de tangencia esta dibujado en la circunferencia y cuando se trata de un punto fuera de ella.

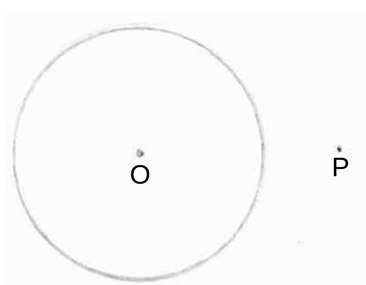
Resulta (como se puede demostrar con elementos de geometría euclidiana) que la recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia T y para trazar esta recta tenemos que prolongar el radio como se muestra a continuación:



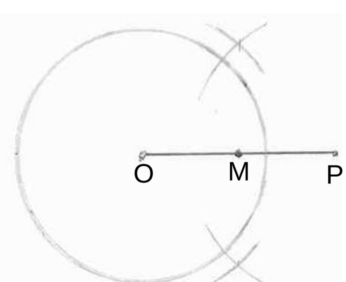
Desde un punto **P** fuera de la circunferencia se pueden trazar dos rectas tangentes de la siguiente forma: se construye la circunferencia que tiene como diámetro el segmento con extremos en el centro de la circunferencia O y en el punto **P**, ésta corta a la circunferencia original en dos puntos que los representamos con las letras A y B; trazamos una recta con los puntos P y A y otra recta con los puntos P y B y esas dos rectas son las tangentes a la circunferencia.

A continuación, describimos los pasos para trazar estas dos rectas tangentes y al final los ilustramos.

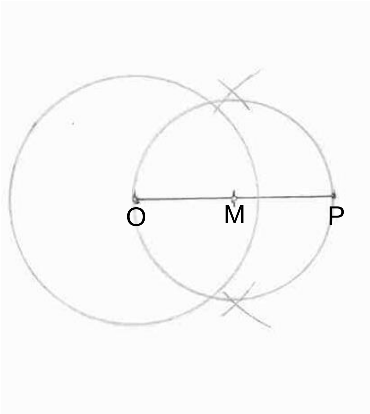
1. Dibujamos una circunferencia con centro O y un punto P fuera de ella (ver trazo 1).
2. Trazamos el segmento $\overline{OP}$, el cual es el diámetro de la segunda circunferencia que se va a trazar, para ello debemos localizar el punto medio de este segmento al que denotamos con la letra M (así tenemos el radio de la circunferencia) esto se ilustra en el trazo 2.
3. Dibujamos la circunferencia con diámetro $\overline{OP}$ y marcamos con las letras A y B los puntos de intersección de ambas circunferencias (ver trazo 3).
4. Las rectas tangentes a la circunferencia original son las que se trazan con los puntos P y A y con P y B (esto se hace en el trazo 4).



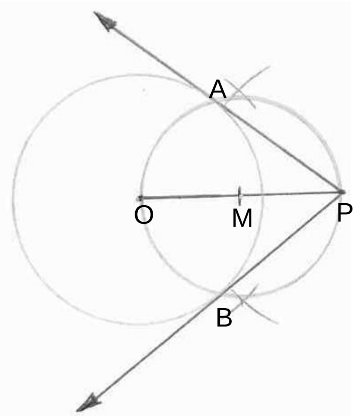
trazo 1



trazo 2



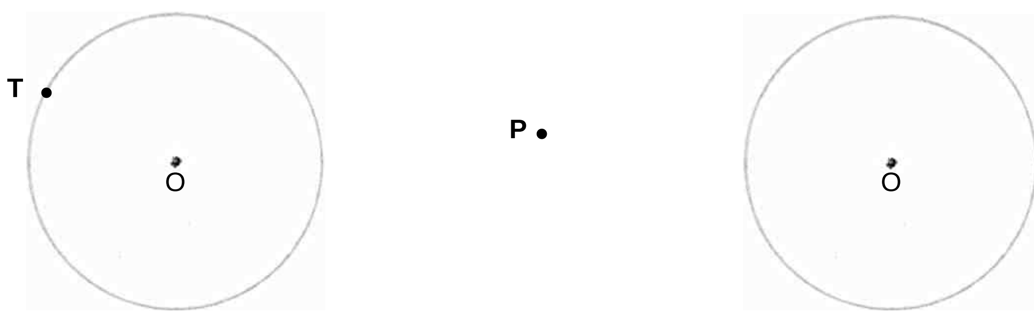
trazo 3



trazo 4

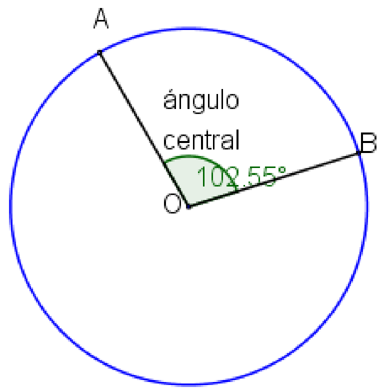
En la circunferencia de abajo a la izquierda traza la recta tangente en el punto T de tangencia.

En la circunferencia de abajo a la derecha traza las dos rectas tangentes a la circunferencia desde el punto P.

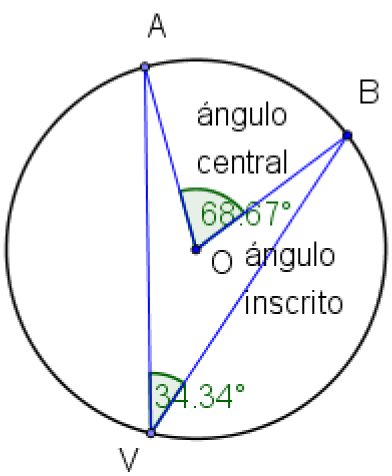


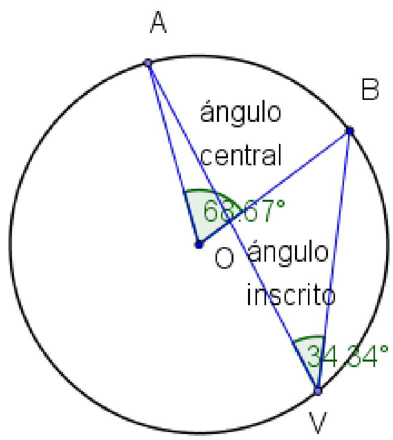
Entre los ángulos notables más usuales de la circunferencia tenemos:

- Ángulo central: es un ángulo formado por dos radios, su vértice es el centro de la circunferencia (los lados del ángulo contienen a dos radios y se acostumbra a dibujar únicamente los radios) como se ejemplifica a continuación con el AOB.

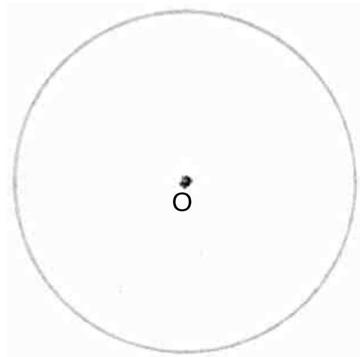


➢ Ángulo inscrito: es un ángulo con su vértice en la circunferencia y sus lados son dos cuerdas (de nuevo aquí los rayos que son los lados del ángulo contienen a las cuerdas, pero se acostumbra dibujar nada más las cuerdas), uno de estos ángulos se ilustra a continuación con el AVB:



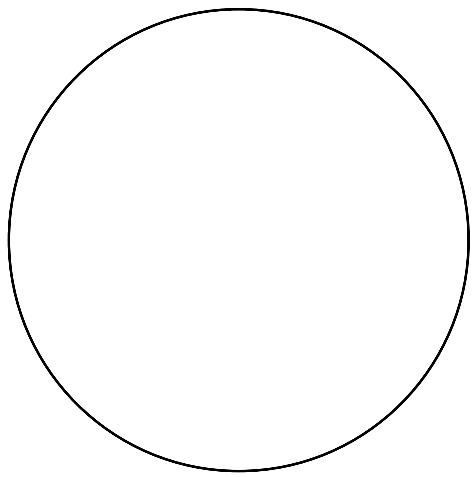


En la siguiente circunferencia traza un ángulo central con dos radios que formen un diámetro con extremos A y B, ¿Cuánto mide el ángulo central? ____________________ y traza un ángulo inscrito con vértice V y que las cuerdas terminen en los extremos A y B. De esta forma se ha construido un ΔAVB, rectángulo, siendo el AVB el ángulo recto.



EL CENTRO DE UNA CIRCUNFERENCIA

Considera el siguiente problema, imagínate que alguien ha dibujado una circunferencia como la que se muestra a continuación.



Describe los pasos necesarios para determinar el centro.

Sigue el procedimiento descrito y encuentra el centro de la circunferencia dado arriba. Comprueba que efectivamente el punto encontrado es el centro de la circunferencia.

APROXIMA EL PERÍMETRO Y ÁREA DEL CÍRCULO

Veamos una forma para calcular de manera aproximada el perímetro y el área de un círculo. Empecemos con el perímetro, para esto necesitas un metro de listón o un pedazo de hilo, algunos objetos circulares (base de un bote de agua, una moneda, un vaso, un marcador, etc.) y una regla graduada. Para realizar las mediciones, sigue los siguientes pasos:

1. Coloca el listón o el hilo alrededor del objeto circular y marca con la mayor precisión posible la longitud necesaria para medir el contorno de uno de los objetos circulares.
2. Mide con una regla la longitud del listón o el hilo empleado en el paso anterior y anota el resultado como perímetro.
3. Mide con la mayor precisión posible el diámetro del objeto.
4. Divide el perímetro entre el diámetro, hasta obtener por lo menos 4 cifras decimales y anota tu resultado.
5. Repite los pasos 1 al 4 con dos objetos más.

Objeto	Perímetro (P)	Diámetro (D)	Perímetro/Diámetro

Observa que, si el perímetro de cada uno de los diferentes círculos se divide entre la longitud de su diámetro respectivo, en todos los casos vistos, se obtiene un valor aproximado al valor de ⍰. Esta relación que has encontrado es válida siempre, sin importar el tamaño del círculo, ni quién lo haya trazado. Lo que puedes concluir con esto es que, en cualquier círculo se cumple que

$$\frac{Perímetro}{Diámetro} = \pi$$

o lo que es lo mismo,

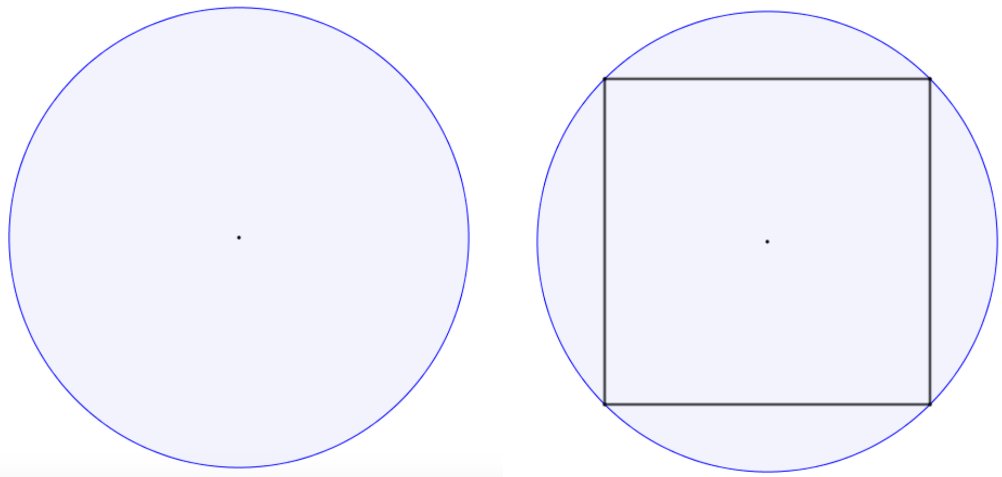
$$Perímetro = \pi \cdot Diámetro$$

Que es la fórmula que conoces para determinar el área de un círculo. Sin embargo, en algunas ocasiones, esta fórmula viene dada en términos del radio ¿Cómo lo escribirías?

Usando lo anterior, calcula cuanto mide el contorno de una mesa circular que tiene como radio 1.2 m. ______________________. Realiza tus cálculos en el siguiente espacio y compara tu respuesta con la de tus compañeros.

Ahora veamos cómo podrás calcular el área de un círculo. Cuando estudiaste los polígonos, encontraste una fórmula para obtener el área. Ahora bien, la pregunta es, ¿se puede deducir una fórmula para calcular el área del círculo?

Veamos una forma sencilla para aproximar el área de un círculo aplicando lo que ya conoces sobre el área de los polígonos regulares. Para llevar acabo esto, calcula el área del siguiente círculo de manera aproximada.



Para encontrar el área, sigue los siguientes pasos:

1. Para facilitar el procedimiento, usa el círculo de la derecha y calcula el área del cuadrado inscrito.
2. En el mismo círculo, usando el cuadrado inscrito, traza un octágono regular (polígono de ocho lados) y calcula su área.
3. Ahora con base en el octágono trazado en el paso 2, traza un polígono regular de 16 lados y calcula el área.

Con base al procedimiento, completa la siguiente tabla:

Número de lados del polígono	Longitud de cada lado	Perímetro	Apotema	Área

Al aumentar el número de lados de los polígonos, ¿Qué sucede con el área? _________

____ ¿Qué sucede con la apotema?

____

Como has observado, cuando el número de lados del polígono regular aumenta, su área se aproxima a la del círculo.

Esto nos hace suponer que cuando el número de lados de los polígonos aumentan, la apotema ⍰ se irá aproximando al radio ⍰, el perímetro ⍰ de los mismos a la longitud de la circunferencia ⍰ y el área del polígono al área del círculo.

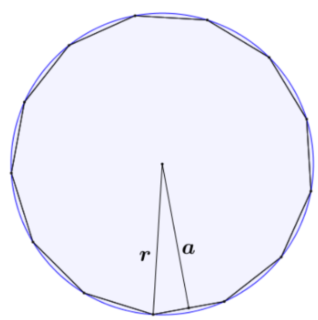
El área de un polígono regular de n lados está dado por:

$$A_n = \frac{n \cdot l \cdot a}{2}$$

donde l es la longitud de cada lado del polígono.

Como hemos dicho, a medida que aumenta el número de lados del polígono regular:

a) El área del polígono regular de n lados $\mathrm{A_n}$ se aproxima cada vez más al área de la circunferencia $\mathrm{A_c}$.
b) El perímetro $P = n \cdot l$ del polígono regular se aproxima cada vez más a la longitud L de la circunferencia, es decir, $L = \pi \cdot D = 2\pi r$
c) La apotema a del polígono de n lados se aproxima cada vez más al radio r de la circunferencia.



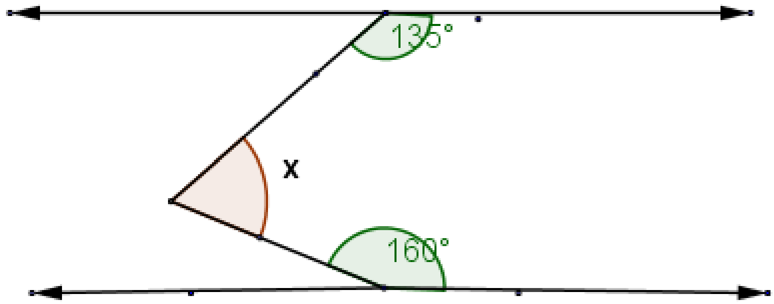
Con base en lo anterior, el área del círculo estaría dado por

$$A_c = \frac{L \cdot r}{2} = \frac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$$

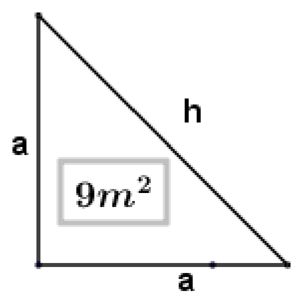
Con lo que ya sabes, calcula el área de la superficie de la mesa circular que tiene como 1.2 m de radio. Realiza tus cálculos en el siguiente espacio.

EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN.

1. En la figura se tiene que $L_1 \parallel L_2$ calcular el valor de x.



2. Encontrar la medida de los lados de un triángulo rectángulo **isósceles** (los dos catetos miden lo mismo) para que su área sea $9m^2$:



UNIDAD 4

CONGRUENCIA, SEMEJANZA Y TEOREMA DE PITÁGORAS

ACTIVIDAD 1

CONGRUENCIA

ACCIÓN 1

COMPRENDER EL CONCEPTO DE CONGRUENCIA.

ACCIÓN 2

USO CORRECTO DE LA NOTACIÓN PROPIA DE LA CONGRUENCIA.

ACCIÓN 3

CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS.

ACCIÓN 4

Aplicar el criterio de congruencia de triángulos, en problemas.

ACTIVIDAD 2

SEMEJANZA

ACCIÓN 1

COMPRENDER EL CONCEPTO DE SEMEJANZA

ACCIÓN 2

TRIÁNGULOS SEMEJANTES CON BASE EN LA DEFINICIÓN Y LOS CRITERIOS DE SEMEJANZA.

ACCIÓN 3

TEOREMA DE THALES.

ACCIÓN 4

ACTIVIDAD 3

TEOREMA DE PITÁGORAS

ACCIÓN 1

TEOREMA DE PITÁGORAS

ACCIÓN 2

TEOREMA DE LA ALTURA DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

- **EJERCICIOS**
- **EXAMEN DE AUTOEVALUACIÓN**

ACTIVIDAD 1

CONGRUENCIA
COMPRENDER EL CONCEPTO DE CONGRUENCIA
ACCIÓN 1

Objetivo: al concluir la acción, el alumno comprenderá la importancia y utilidad de la geometría, así como comprenderá el concepto de congruencia.

> **AL ESTUDIANTE:** si entiendes la gran importancia que tiene el triángulo en la vida diaria común, artística y científica aumentará tu interés por el estudio de las propiedades teóricas de esta figura y te motivaras para aprender el método deductivo de las matemáticas, además de que al comprender el concepto de congruencia te darás cuenta de su utilidad en la vida cotidiana.

GEOMETRÍA Y ARTE.

Es importante resaltar que la geometría desarrolla en cada individuo un sistema espacial y analítico que le ayuda a mejorar su desarrollo cerebral para la comprensión de los contenidos temáticos en diferentes áreas, lo que ha permitido que la geometría progrese –por no decir lo menos- y con ella, sus formas de análisis y contextualizaciones[1]. Hay autores como Jean Piaget que reconocen la importancia que tiene las matemáticas y sus diferentes ramas en el alcance de un desarrollo óptimo en el campo cognitivo del sujeto.

Las matemáticas y arte siempre han estado estrechamente relacionados. Las simetrías, las proporciones o la geometría son elementos presentes en el arte. Si observamos un cuadro o una escultura veremos que el artista tiene mucho de matemático. No hay que olvidar que, a lo largo de la historia, grandes artistas han sido grandes matemáticos.

Esta visión histórica nos sugiere que podemos trabajar conjuntamente matemáticas y educación plástica en todas las etapas.

Ya en los primeros años el arte puede ser un recurso para aprender geometría. En palabras de la profesora de la Universidad Autónoma de Barcelona Mequè Edo:

“En infantil la observación, el análisis y la interpretación de obras de arte, y la producción de creaciones plásticas inspiradas en ellas, crean un contexto interdisciplinar en el que los alumnos aprenden de forma simultánea matemáticas y educación visual y plástica”[2]

---

[1] Kerlinson Arturo Rincon Artunduaga. (2013). Influencia en el proceso de enseñanza aprendizaje de los puntos notables de un triángulo, usando car. estudio de caso i.e. la laguna, Tesis de Maestría, Colombia: Universidad Nacional De Colombia

[2] Malena Martín. (2017). Arte, Geometría, Kandinsky. 01/Abril/2017, de Diseño web Meisi Sitio web: https://aprendiendomatematicas.com/geometria-y-arte/

A continuación, se mencionan algunos artistas, que en sus obras han abstraído la geometría en Latinoamérica[3].

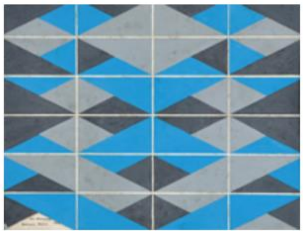


Figura 1.
Antônio Maluf
Estudo Vila Normanda,1964
(Estudio Villa Normanda)
Gouache sobre cartón
Colección particular

Maluf, Antônio
São Paulo, 1926 – 2005
Pintor, dibujante y diseñador
A principios de los años 50 inicia la serie constructivo–geométrica Equação dos desenvolvimentos, con formas precedentes del cartel que realiza para la primera Bienal de São Paulo en 1951. Complementa esa investigación visual rítmica con las series Progressões crescentes o descrecentes. Desde 1960 aplica sus investigaciones en varios murales, en su mayoría en cerámica esmaltada, en colaboración con arquitectos como Fábio Penteado o Lauro da Costa Lima. Durante los 60 trabaja en publicidad, creando logotipos y anuncios, y en diseño textil

Figura 2.
Alexandre Wollner
Cartel de la III Bienal de São Paulo
en el Museu de Arte Moderna, 1955
Impresión digital, 2010
Colección particular

Wollner, Alexandre
São Paulo, 1928
Diseñador gráfico e industrial, pintor y fotógrafo brasileño, hijo de inmigrantes yugoslavos. Vive en São Paulo
Inspirado por la obra renovadora del diseño visual de Paul Rand y Alexey Brodovitch, se interesa sobre todo por el diseño gráfico. A principios de los años 50 se acerca al arte concreto en obras de pintura, aplicando pronto su estética al diseño gráfico publicitario. Colabora con Geraldo de Barros en diseño de carteles de cine y realiza varios carteles como estudiante de Ulm. Se convierte en uno de los pioneros del diseño gráfico e industrial en Brasil, elaborando el logotipo corporativo de numerosas empresas. Entre sus muchos clientes se encuentran Ibesa, Coqueiro, Argos Industrial, Coretron, Metal Leve, Equipesca, Ultragaz, Grupo Hansen, Mausa, Brasilit, Itaú, São Paulo Petróleo y varias editoriales.

¡EXISTE LA GEOMETRÍA EN EL ARTE!

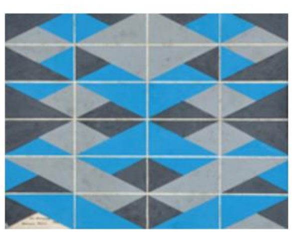


Figura 3.

Figura 4.

[3] Aurelio Medina. (2011). América fría. La abstracción geométrica en Latinoamérica (1934-1973). 01/Abril/2017, de Fundación Juan March Sitio web: http://www.march.es/arte/madrid/exposiciones/america/los_artistas.aspx?l=1

Alexandre Wollner **Antônio Maluf**

En las obras de Antônio Maluf y Alexandre Wollner, que aprecias__________________

____

¿Observas algunas figuras geométricas en la obra de Antônio Maluf? ____ ¿Cuáles?

____

¿Observas algunas figuras geométricas en la obra de Alexandre Wollner? ____ ¿Cuáles?

____

¿Cómo suelen ser las figuras entre sí de las obras de Alexandre Wollner?

____

Explica tu respuesta____

¿Cómo suelen ser las figuras entre sí de las obras de Antônio Maluf?

____

Explica tu respuesta____

¿Las figuras geométricas que se presentan en las obras de arte de Antônio Maluf y Alexandre Wollner, como son entre ellas? ___________________________________

____

0bservas alguna diferencia entre ellas _______ Por qué _______________________

____

A qué conclusiones, llegas con respecto a la obra de Antônio Maluf _______________

____

A qué conclusiones, llegas con respecto a la obra de Alexandre Wollner ____________

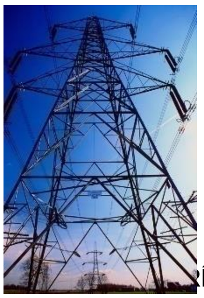
____

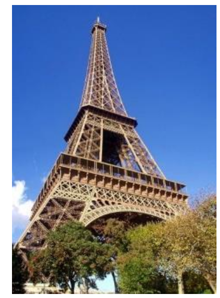
EL USO DEL TRIÁNGULO

Desde mucho tiempo atrás el hombre se dio cuenta de la utilidad del triángulo para su práctica social y su vida cotidiana.

ra 5

En la actualidad el uso de esta figura geométrica es de suma importancia en diferentes ámbitos, por ejemplo, en sus aplicaciones en la arquitectura, debido a que el triángulo tiene la propiedad de ser la figura poligonal más rígida que existe, esto significa que el triángulo soporta mucho peso sin deformarse en cambio un cuadrado o cualquier otro polígono con relativamente poco peso se deforman, esto está asociado con el hecho de que la única posibilidad de cambiarle la forma a un triángulo es modificando la longitud de sus lados, mientras que un rectángulo se desplaza convirtiéndose en un paralelogramo con la misma longitud de sus lados (con figuras articuladas puedes observar esta rigidez del triángulo y la vulnerabilidad del rectángulo). Esta propiedad hace que, en estructuras metálicas, en edificios, puentes, torres de luz, torres de petróleo, etc., la figura predominante sea el triángulo, aunque cabe destacar la combinación de otros elementos geométricos como líneas, segmentos paralelos y perpendiculares, diferentes tipos de ángulos, etcétera.



Las primeras civilizaciones mediterráneas adquirieron poco a poco ciertos conocimientos geométricos de carácter muy práctico: eran esencialmente algunas fórmulas -o mejor dicho algoritmos expresados en forma de "recetas"- para calcular áreas y longitudes. La finalidad era práctica, pues se pretendía con ello calcular la producción proporcional de las parcelas de tierra para determinar los tributos o reconstruirlas después de las inundaciones. La historia muestra que los conocimientos geométricos de esta civilización -así como los de las culturas mesopotámicas- los pasó a la cultura griega esencialmente a través de Tales de Mileto (siglo VI a.n.e.), los pitagóricos y de Euclides.

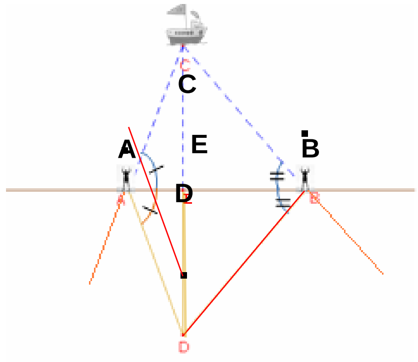
Tales de Mileto permaneció en Egipto un largo periodo de su vida, aprendiendo de los sacerdotes y escribas egipcios todo lo referente a sus conocimientos en general, y aquéllos quedaron asombrados cuando fue capaz de medir la altura de la pirámide de Keops, utilizando elementos geométricos (predominantemente el triángulo) que se conocerán más adelante y se podrá ver cómo seis siglos antes de Cristo pudo hacer estos cálculos.

Otra de las aportaciones de Tales fue la de medir la distancia de un barco anclado en el mar a la orilla de la playa.[4] ¿Cómo lo harías tú? Él lo hizo de la siguiente manera: colocó una estaca en un punto a la izquierda del barco en la orilla de la playa y trazó en la arena la línea recta que su vista marcaba entre la estaca y un punto del barco, después colocó otra estaca en un punto a la derecha del barco en la orilla de la playa y repitió el procedimiento; una vez trazadas estas líneas copió los ángulos ∠BAC y ∠ABC en la tierra y con ello construyó en tierra el triángulo que se formaría en el mar uniendo los puntos donde puso las estacas y donde estaba el barco; después se paró en el punto D y trazó el punto E en la línea recta que su vista marcaba al punto del barco (ver figura 3) y así pudo medir la distancia del barco a la orilla de la playa. ¿Cómo pudo hacer Tales hace

[4] Ver James R. Newman, *Sigma. El mundo de las matemáticas*, p. 354.

2,600 años estas construcciones geométricas? Lo veremos en el desarrollo de la teoría del triángulo.

Figura 7



CONGRUENCIA

Los automóviles se fabrican utilizando la producción en cadena. Los componentes producidos deben ser de idéntico tamaño y forma para poderlos emplear en cualquier automóvil de la línea de montaje. Los repuestos también deben ser idénticos.

Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma con las mismas dimensiones. En particular para que dos triángulos sean congruentes deben tener los tres lados y los tres ángulos congruentes entre ellos en un orden determinado.

FIN DE LA ACCIÓN

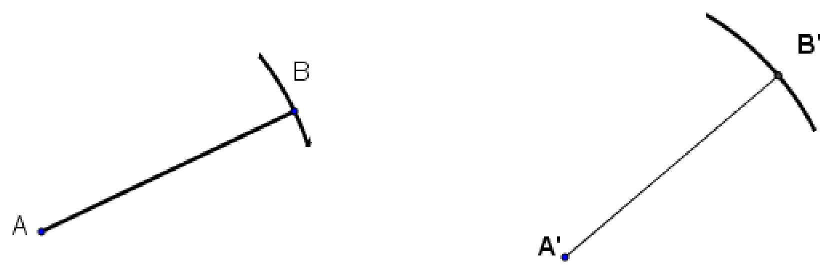
UTILIZAR CORRECTAMENTE LA NOTACIÓN PROPIA DE LA CONGRUENCIA
ACCIÓN 2.

Objetivo: al concluir la acción, el alumno debe utilizar correctamente la notación propia de la congruencia.

> **AL ESTUDIANTE:** para un aprendizaje eficaz de la congruencia es necesario que domines el uso adecuado de la notación. Esta acción está dedicada a ello.

Ejemplo 1. Como viste en las construcciones elementales con regla y compás puedes hacer construcciones como estas: reproducir un segmento dado $\overline{AB}$.
Sea $\overline{AB}$ el siguiente segmento

Se marca un punto A'



Hacemos centro en el punto A y se abre el compás hasta el punto B, luego llevamos el compás hasta el punto A' (haciendo centro ahí) y marcamos un arco, tomas la regla y marcas un segmento de A' a un punto del arco. Que puedes decir del nuevo segmento que has determinado _______

Como ya lo viste en la unidad anterior has copiado un segmento, lo que quiere decir que el segmento $\overline{A'B'}$ tiene la misma medida que el segmento $\overline{AB}$. Entonces podemos decir que el segmento $\overline{AB}$ es congruente con el segmento $\overline{A'B'}$. Para abreviar esta propiedad entre los segmentos lo escribimos así: $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y se lee, segmento $\overline{AB}$ es congruente con el segmento $\overline{A'B'}$. Como recordaras:

No debemos decir que los $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ que acabas de construir son iguales porque ocupan dos lugares diferentes en el dibujo, lo que tienen en común es su longitud. ***En general, a dos figuras que tienen la misma forma y las mismas dimensiones se les denomina figuras congruentes.*** Por lo tanto, aquí hemos trazado dos segmentos congruentes.

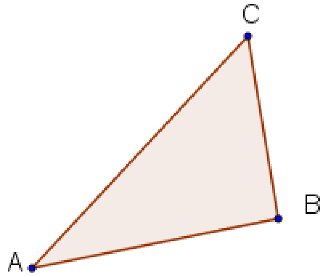
Ejemplo 2. Ahora recordaras los ángulos.

¿Qué es un ángulo? ____.

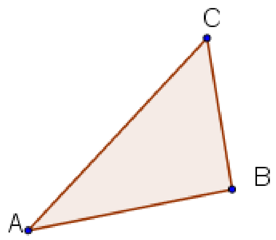
Dibuja un ángulo en el siguiente espacio:

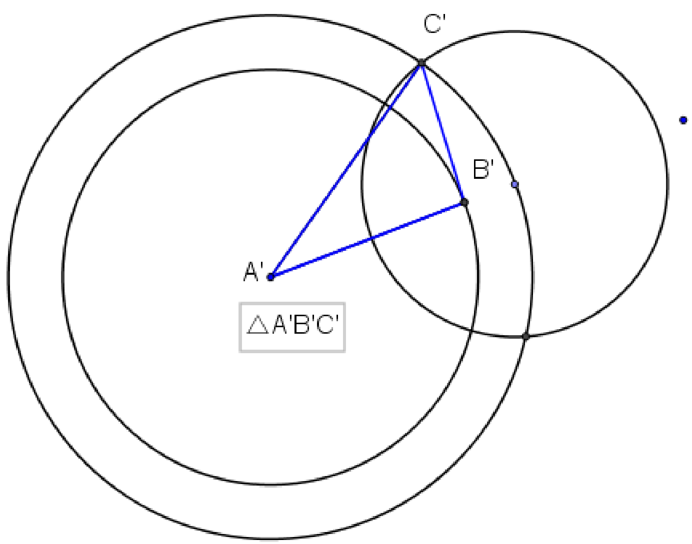
Después de dibujar el ángulo, copia ese ángulo al lado derecho, con regla y compás.
¿Cómo indicas que los dos ángulos tienen la misma medida? ___________________

Ejemplo 3. Ahora pasamos a copiar un triángulo.
Como recordaras un triángulo se forma con tres puntos no colineales, cada punto lo podemos llamar A, B y C y al triángulo ΔABC, los lados son los segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$ y los ángulos son $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle ACB$ o simplemente A, B y C si no hay confusión.



Como ya sabes copiar un segmento y un ángulo, ahora copia el triángulo ΔABC





Que podemos decir de los lados de los triángulos, escribe la relación de sus lados y de sus ángulos:

Lado AB o segmento $\overline{AB}$ como es con el segmento $\overline{A'B'}$ ___________________________

Lado BC o segmento $\overline{AB}$ como es con el segmento $\overline{B'C'}$ ___________________________

Lado CA o segmento $\overline{CA}$ como es con el segmento $\overline{C'A'}$ ___________________________
¿y los ángulos?

El ángulo $< A$ como es con el ángulo $< A'$ ____________________________________

El ángulo $< B$ como es con el ángulo $< B'$ ____________________________________

El ángulo $< C$ como es con el ángulo $< C'$ ____________________________________

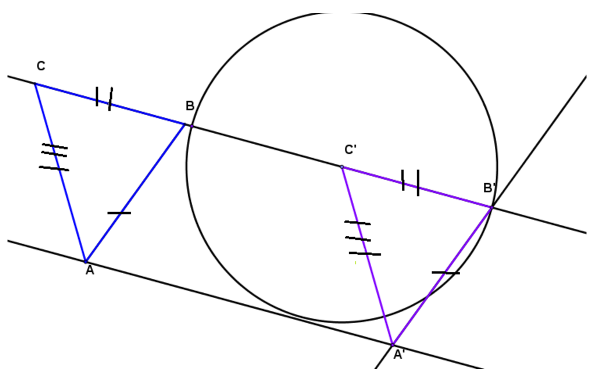
Como podemos ver por la construcción del $\Delta A'B'C'$ y por lo que escribimos arriba nos damos cuenta que sus lados y sus ángulos son congruentes esto quiere decir: $AB \cong A'B'$ y se lee, lado AB congruente con A'B'; $AC \cong A'BC'$; $BC \cong B'C'$.

Con relación a los ángulos tenemos: $< A \cong < A'$ y se lee ángulo A es congruente con ángulo A'; $< B \cong < B'$; $< C \cong < C'$

Cumpliéndose estas seis condiciones podemos decir que dos triángulos son congruentes si sus lados respectivos son congruentes y sus ángulos respectivos son congruentes.

Definición: Para mencionar que dos triángulos son congruentes, deben tener los tres lados y los tres ángulos congruentes entre ellos en un orden determinado y es muy importante escribir el orden de los vértices que mantienen la congruencia.

Ejemplo 4. Observemos los siguientes triángulos en la construcción.



Se ha copiado el ΔABC como se muestra en el $\Delta A'B'C'$, por la definición anterior podemos decir que:

El lado $AB \cong A'B'$ y también se les conoce como lados **homólogos**, y se pueden marcar como se muestra en la figura (una marca)

El lado $BC \cong B'C'$, lados homólogos, y se pueden marcar como se muestra en la figura (dos marcas)

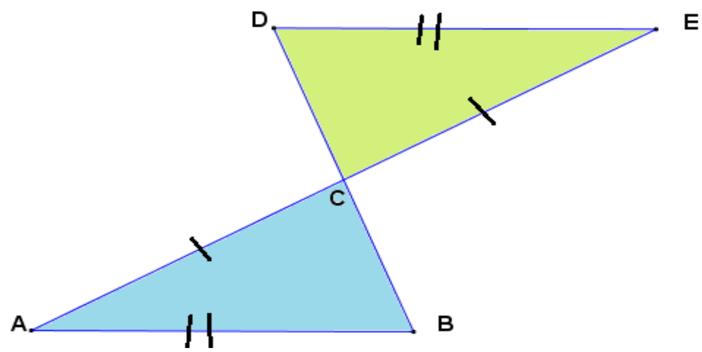
El lado $AC \cong A'C'$, lados homólogos, y se pueden marcar como se muestra en la figura (tres marcas)

Con relación a los ángulos también se cumplen las tres relaciones. Escribe abajo las tres relaciones y marca en la figura, de la misma manera que los lados los ángulos para identificar los que son homólogos en la figura.

Ángulo A ó $< A$ ______ homólogo con____________________
Ángulo B ó $< B$ ______ homólogo con ____________________
Ángulo C ó $< C$ ______ homólogo con ____________________

Apoyándonos en la definición que acabamos de ver, vamos a hacer algunos ejemplos donde podemos aplicar la definición.

Ejemplo 5. Observa la figura y contesta las siguientes preguntas.



En los triángulos que se forman:
¿Qué lados son congruentes? Explica la razón de tu respuesta. ____________________
____
____
____

Si el ángulo B, $m\measuredangle B = 55^o$ ¿Qué otro ángulo mide lo mismo?
____

¿Qué ángulo es correspondiente al ángulo, <E? ________________________________

Marca en la figura los ángulos opuestos por el vértice y ¿cómo son sus medidas? ____________

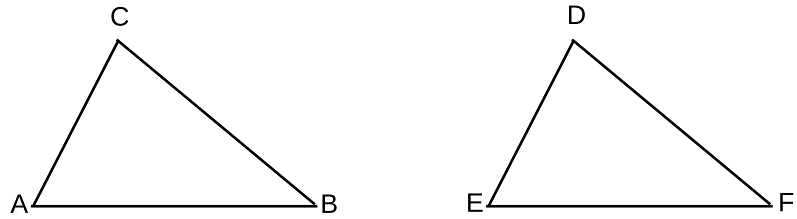
¿Cómo expresas simbólicamente los ángulos opuestos por el vértice de la figura, para referirlos a sus triángulos respectivos?
____

Si la medida de los ángulos opuestos por el vértice es de 80º ¿Cuál es la medida de los ángulos restantes? ____

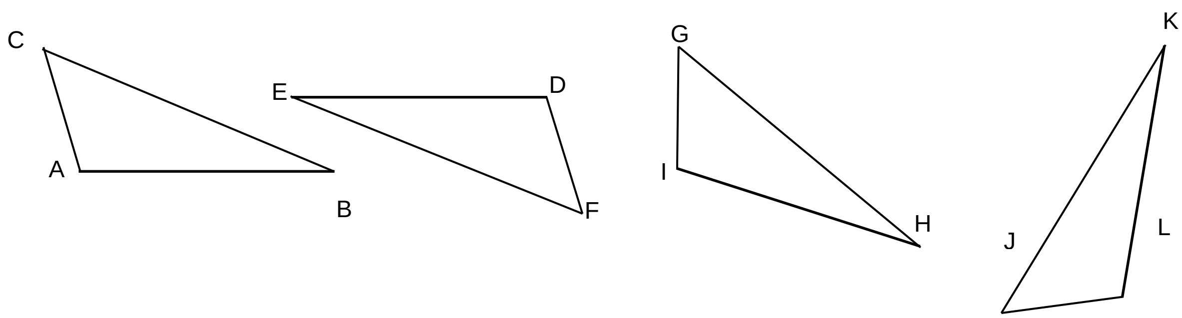
RESUMIENDO: CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS
Hemos visto que dos figuras son congruentes si tienen la misma forma con las mismas dimensiones. En particular dijimos que para que dos triángulos sean congruentes deben tener los tres lados y los tres ángulos congruentes entre ellos en un orden determinado y

es muy importante escribir el orden de los vértices que mantienen la congruencia, por ejemplo, si en los triángulos congruentes de la figura de abajo los vértices tienen el orden descrito entonces la congruencia debe escribirse así:

$\Delta ABC \cong \Delta EFD$, cualquier otro arreglo es erróneo, por ejemplo $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ porque no expresa el orden de la congruencia. Las partes correspondientes que son congruentes en dos figuras se les llaman ***partes homólogas***



Los cuatro triángulos que a continuación se dibujan son congruentes, escribe la congruencia que hay entre ellos en forma correcta separándolos con el signo $\cong$



$\Delta ABC \cong$ ____.

Ejercicios

Ejercicio 1

Dados dos segmentos a y b:

a ________________________

b ________________

Construir un triángulo que tenga un lado igual a a y otro lado igual a b.

¿Cuántos triángulos se pueden construir? ______________________________________.

¿Por qué? ____.

¿Qué tipo de triángulos son? ____.

Ejercicio 2

Dados los segmentos a, b y c construir, un triángulo que tenga un lado igual a a, otro *igual* a, b y el otro lado igual a, c.

a ___________________

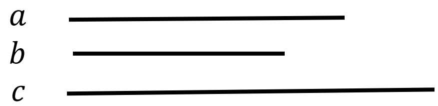
b ______________

c ___________________

¿Se pueden construir dos triángulos distintos? _________________________________.

¿Por qué?
____.

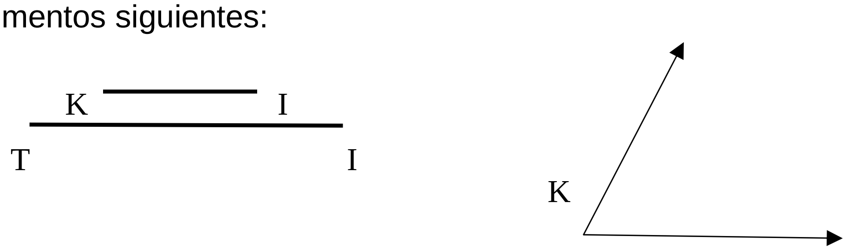
Ejercicio 3
Dados los segmentos a, b y c construir, un triángulo que tenga un lado igual a, a otro *igual* a, b y el otro lado igual a, c.



¿Se pueden construir dos triángulos distintos? ________________________________.
¿Por qué?
____.

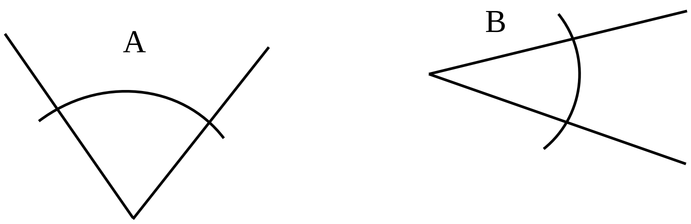
Ejercicio 4
Usa compás y regla no graduada para construir ΔPQR con $\overline{PQ}$ como cateto, y con $m\measuredangle P = 90^{\circ}$ y $m\measuredangle Q = 45^{\circ}$

Ejercicio 5
Construye el papalote $KITE$, en el que $KI = KE$ y $TI = TE$, usando el ángulo y los segmentos siguientes:



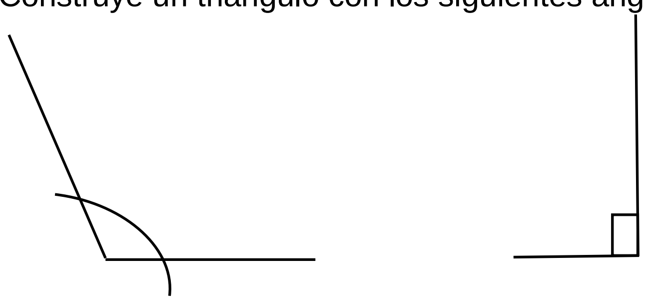
Recuerda que no debemos decir que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ que acabas de construir son iguales porque ocupan dos lugares diferentes en el espacio, lo que tienen en común es su longitud. En general, a dos figuras que tienen la misma forma y las mismas dimensiones se les denomina ***figuras congruentes***. Así, hemos trazado dos segmentos congruentes.

Ejercicio 6
Dados los ángulos A y B



Construir un triángulo que tenga un ángulo igual a, A y otro ángulo igual a, B
¿Es posible que, a partir de dos ángulos, se puede construir un triángulo? ___________.
¿Por qué?
____.

Construye un triángulo con los siguientes ángulos



Es posible que, a partir de dos ángulos, se puede construir un triángulo. ____________.
¿Por qué?
____.

¿Qué puedes concluir con relación a la construcción de los triángulos anteriores?
____.

Recuerda que cuando reproducimos un ángulo, tenemos dos ángulos congruentes (más no iguales)

FIN DE LA ACCIÓN

CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS.
ACCIÓN 3.

Objetivo: al concluir la acción, el alumno debe identificar el criterio de congruencia que debe utilizar para resolver problemas.

> **AL ESTUDIANTE:** para un aprendizaje eficaz de la congruencia es necesario que domines el uso adecuado de la notación y el criterio que debes utilizar según las condiciones del problema. Lo que aprenderás ahora, es el método lógico deductivo, es importante que comprenda como identificar que dos triángulos son congruentes con los elementos mínimos.

Vamos a pasar ahora a hacer demostraciones de algunas propiedades geométricas que tienen las figuras triangulares

El método de demostración que vamos a usar se llama ***método deductivo*** debido a que la demostración de una proposición se deduce con base en proposiciones que ya han sido demostradas o que se admiten sin demostración.

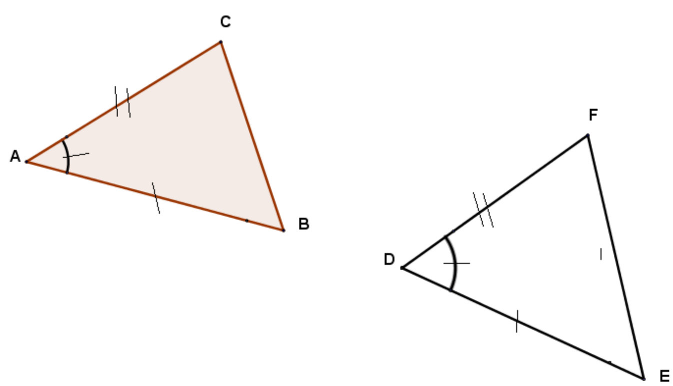
Las proposiciones que se admiten sin demostración se llaman ***axiomas***. Un método deductivo inicia con axiomas y con base en ellos se hacen las primeras demostraciones de las proposiciones que se van agregando para hacer nuevas demostraciones. Las proposiciones que se demuestran generalmente se llaman ***teoremas***.

Iniciemos el método deductivo con un axioma que es un criterio de congruencia de triángulos del cual ya tenemos evidencia empírica en la unidad anterior haciendo construcciones con regla y compás.

CRITERIO DE CONGRUENCIA LAL (axioma)

- *Si dos lados de un triángulo y el ángulo generado por esos lados son congruentes respectivamente a dos lados y el ángulo generado por ellos de otro triángulo, entonces los dos triángulos son congruentes.*

Este axioma nos dice que basta con que tres magnitudes de un triángulo sean iguales a las respectivas magnitudes de otro triángulo para que los triángulos sean congruentes, pero dichas magnitudes deben estar en el orden LAL como se muestra en la figura.

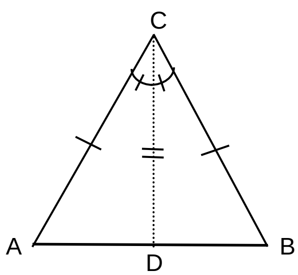


En el lenguaje simbólico de las matemáticas este criterio LAL se escribe así:

SI en ΔABC y ΔDEF se tiene $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\angle A \cong \angle D$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

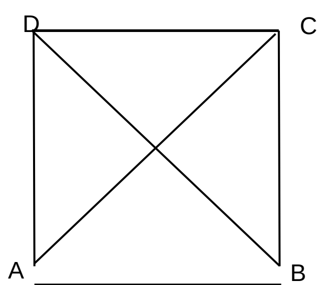
Proposición 1. En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.

Demostración. Sea ΔABC isósceles con $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, por demostrar que $\angle A \cong \angle B$. Tracemos la bisectriz del $\angle C$ y sea D el punto de intersección con $\overline{AB}$.



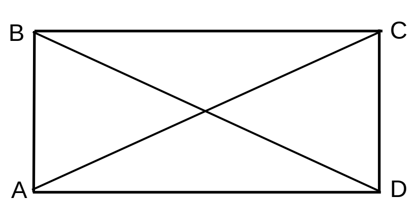
Afirmaciones	Razones
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$	Por ser isósceles
$\angle ACD \cong \angle BCD$	Por ser la bisectriz
$\overline{CD} \cong \overline{CD}$	Por ser el mismo lado
$\Delta ACD \cong \Delta BCD$	Por criterio LAL
$\angle A = \angle B$	Por ser partes congruentes

Proposición 2. Las diagonales de un cuadrado son congruentes.
Demostración. Sea ABCD los vértices de un cuadrado. Por demostrar que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, para lo cual consideremos los triángulos ΔABC y ΔBAD. (ver figura)



Afirmaciones	Razones
$\overline{AB} \cong \overline{BA}$	Es el mismo segmento
$\angle ABC \cong \angle BAD$	Son ángulos rectos
$\overline{BC} \cong \overline{AD}$	Son lados de un cuadrado
$\Delta ABC \cong \Delta BAD$	Por criterio LAL
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$	Por ser partes congruentes

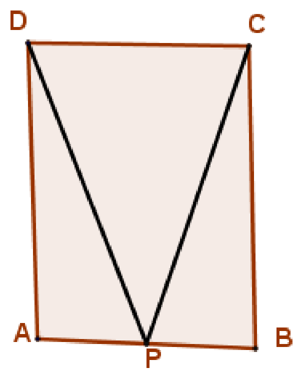
Ahora se te pide que hagas las siguientes demostraciones.
Proposición 3. En un rectángulo demuestra que las diagonales son congruentes.
Demostración. Sea ABCD los vértices de un rectángulo. ______________________
____.



Afirmaciones	Razones

Proposición 4. En un rectángulo ABCD, el punto medio de $\overline{AB}$ es P. Demuestra que $\overline{PD} \cong \overline{PC}$.

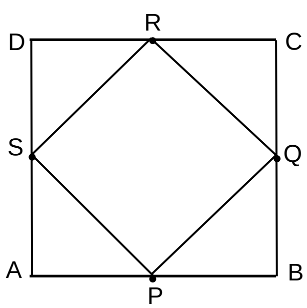
Demostración.



Afirmaciones	Razones

Proposición 5. Sean P, Q, R y S los puntos medios de los lados del cuadrado ABCD demuestra que $\overline{PQ} \cong \overline{QR} \cong \overline{RS} \cong \overline{SP}$.

Demostración.



Afirmaciones	Razones

En la proposición anterior se ha demostrado que el cuadrilátero PQRS tiene sus cuatro lados iguales, pero esto no nos asegura que es un cuadrado (podría ser un rombo). ¿Qué se necesita demostrar para afirmar que es cuadrado? ____________________

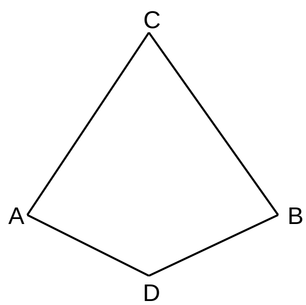
Proposición 6. Demuestra que el cuadrilátero PQRS de la proposición anterior es un cuadrado.

Demostración. Usa la proposición 5 del triángulo isósceles y la proposición 9 para demostrar esta proposición (básate en la figura de la proposición anterior)

Afirmaciones	Razones

Proposición 7. En la siguiente figura $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BD}$. Demuestra que:
$\angle CAD \cong \angle CBD$

Demostración. (Sugerencia: dibuja el $\overline{AB}$)



Afirmaciones	Razones

Proposición 8. En la figura anterior traza el segmento $\overline{CD}$ y demuestra que:
$\Delta ACD \cong \Delta BCD$

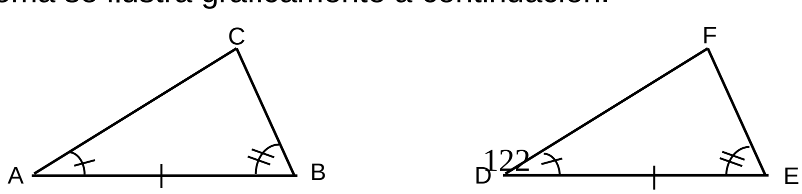
Demostración

Afirmaciones	Razones

CRITERIO DE CONGRUENCIA ALA (axioma)

- *Si dos triángulos tienen congruente un lado y los ángulos que tienen en común a dicho lado, entonces los triángulos son congruentes.*

Este axioma se ilustra gráficamente a continuación.



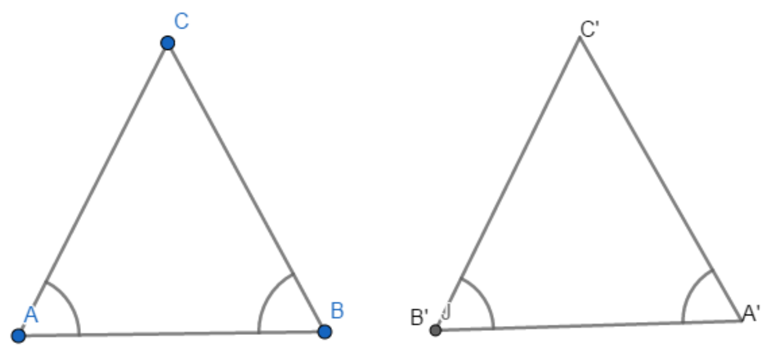
En el lenguaje simbólico de las matemáticas el criterio ALA se escribe así:

SI en ΔABC y ΔDEF se tiene $\angle A \cong D$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\angle B \cong \angle E$ entonces ΔABC $\cong$ ΔDEF.

La siguiente proposición es la **inversa** del triángulo isósceles.

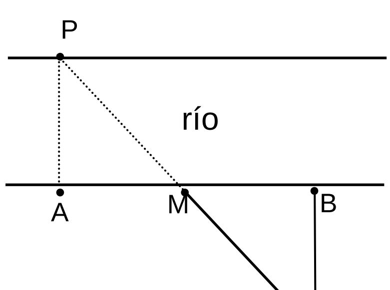
Proposición 9. Si en un triángulo dos ángulos son congruentes, entonces los lados opuestos son congruentes, es decir el triángulo es isósceles.

Demostración. Sea ΔABC con $\angle A \cong \angle B$, queremos demostrar que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, para lo cual copiemos el ΔABC a la derecha del triángulo, pero invirtiéndolo como si estuviera reflejado en un espejo y así tenemos el ΔA'B'C' como se muestra abajo en la figura.



Afirmaciones	Razones
$\angle A \cong \angle B'$	Se copió en forma congruente
$\overline{AB} \cong \overline{B'A'}$	Se copió en forma congruente
$\angle B \cong \angle A'$	Se copió en forma congruente
$\Delta ABC \cong \Delta B'A'C'$	Por criterio ALA
$\overline{AC} \cong \overline{B'C'}$	Partes homólogas
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$	Se copió en forma congruente

¿Cómo medir el ancho de un caudaloso río? Buscamos un objeto que esté a la orilla del río del otro lado de donde nos encontramos, por ejemplo un árbol que lo indicamos con la letra P, ponemos una estaca en frente del árbol al otro lado del río en la letra A, en la tierra dibujamos una línea sobre la orilla del río y ponemos otra estaca en un punto B y otra estaca en el punto medio M entre A y B; dibujamos una línea siguiendo con la vista la estaca M y el árbol hasta el punto C que es la intersección con la perpendicular a $\overline{AB}$ en la estaca B. Todo esto está dibujado abajo y con ello medimos en la tierra el ancho del río como lo demostramos a continuación.



Afirmaciones	Razones
$\angle PAM \cong \angle CBM$	Ángulos rectos

$\overline{AM} \cong \overline{BM}$	M punto medio de $\overline{AB}$
$\angle AMP \cong \angle BMC$	Opuestos por el vértice
$\Delta AMP \cong \Delta BMC$	Criterio ALA
$\overline{AP} \cong \overline{BC}$	Partes homólogas

CRITERIO DE CONGRUENCIA LLL (axioma)

- *Si los tres lados de un triángulo son respectivamente congruentes a los tres lados de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.*

Este axioma se ilustra gráficamente a continuación.

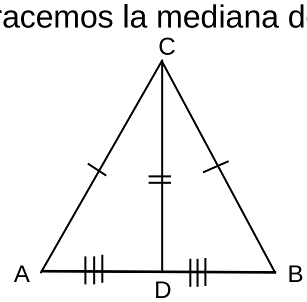
En el lenguaje simbólico de las matemáticas el criterio LLL se escribe así:

Si en ΔABC y ΔDEF se tiene $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{AC} \cong \overline{DF}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ entonces $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

Otra demostración del triángulo isósceles (es la misma que la proposición 5).

Proposición 10. En un triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.

Demostración. Sea ΔABC isósceles con $\overline{AC} \cong \overline{BC}$, por demostrar que $\angle A = \angle B$. Tracemos la mediana del $\angle C$ y sea D el punto de intersección con $\overline{AB}$.

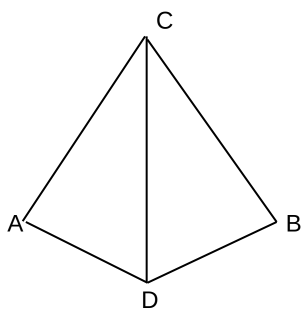


Afirmaciones	Razones
$\overline{AC} \cong \overline{BC}$	Por ser isósceles

$\overline{CD} \cong \overline{CD}$	Por ser el mismo lado
$\overline{AD} \cong \overline{BD}$	Por ser $\overline{CD}$ la mediana
$\Delta ACD \cong \Delta BCD$	Por criterio LLL
$\angle A = \angle B$	Por ser partes homólogas

Proposición 11. En la siguiente figura $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AD} \cong \overline{BD}$. Demuestra que $\overline{CD}$ es la bisectriz de los ángulos $\angle ACB$ y $\angle ADB$.

Demostración.

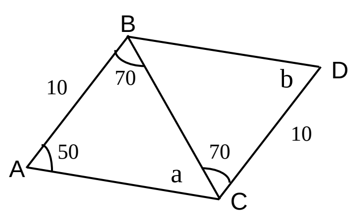


Afirmaciones	Razones

EJERCICIOS

Ejercicio 1. Con la información contenida en la figura demuestra que los triángulos son congruentes y obtén los valores de “a” y “b”.

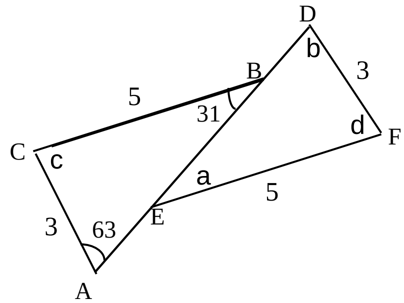
Demostración.



Afirmaciones	Razones

Ejercicio 2. En la siguiente figura $\overline{AB} \cong \overline{DE}$. Demuestra con la información contenida en la figura que los triángulos son congruentes y calcula los valores de “a”, “b”, “c” y “d”.

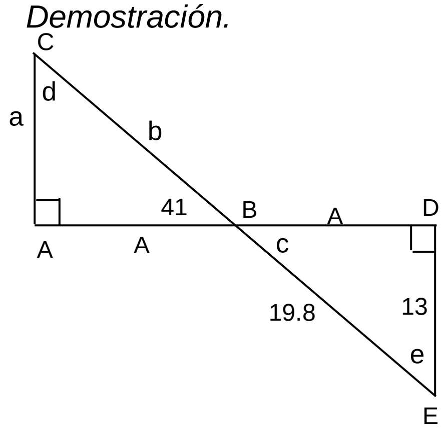
Demostración



Afirmaciones	Razones

Ejercicio 3. Con la información contenida en la figura demuestra que los triángulos son congruentes y obtén los valores de "a", "b", "c", "d" y "e".

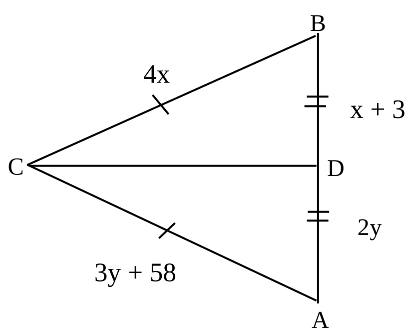
Demostración.



Afirmaciones	Razones

Ejercicio 4. Demuestra que $\Delta ACD \cong \Delta BCD$, luego con base en la congruencia construye y resuelve el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas y calcula la longitud de los lados que tienen esas incógnitas.

Demostración. Usa la tabla para demostrar la congruencia de los triángulos y aparte resuelve la parte algebraica.



Afirmaciones	Razones

En el siguiente espacio construye y resuelve el sistema 2×2, luego calcula la longitud de los lados de los triángulos que tienen esas incógnitas.

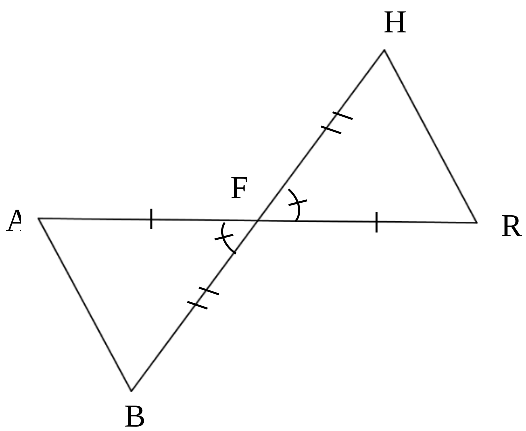
FIN DE LA ACCIÓN

APLICAR EL CRITERIO DE CONGRUENCIA LAL DE TRIÁNGULOS, EN PROBLEMAS.
ACCIÓN 4

AL ESTUDIANTE debes colocar el criterio que permita determinar si existe congruencia entre los triángulos con la información o bien en caso de que no exista congruencia argumentar la razón.

Ejemplo: 1. Dado: $\overline{AR} \cong \overline{BH}$ se bisecan en F

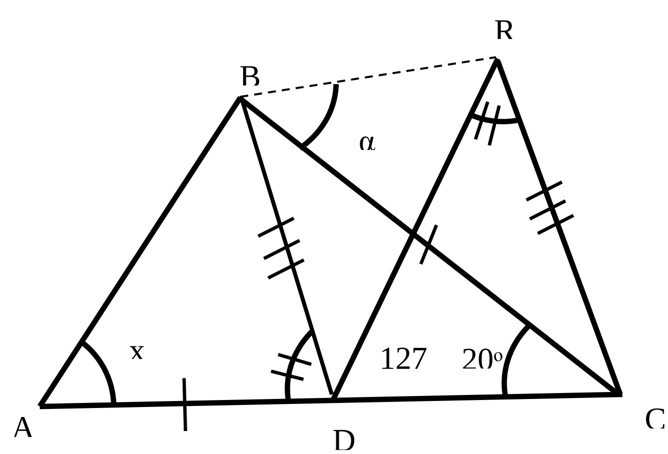
Demostrar $\Delta FAB \cong \Delta FRH$



Proposición	Razón
$\overline{AF} \cong \overline{RF}$	$\overline{AR}$ *es bisecado* (*Dado*)
$\overline{FB} \cong \overline{FH}$	$\overline{BH}$ *es bisecado* (*Dado*)
$\measuredangle AFB \cong \measuredangle RFH$	Si dos rectas se intersecan los ángulos opuestos por el vértice son congruentes
$\Delta FAB \cong \Delta RFH$	Postulado LAL

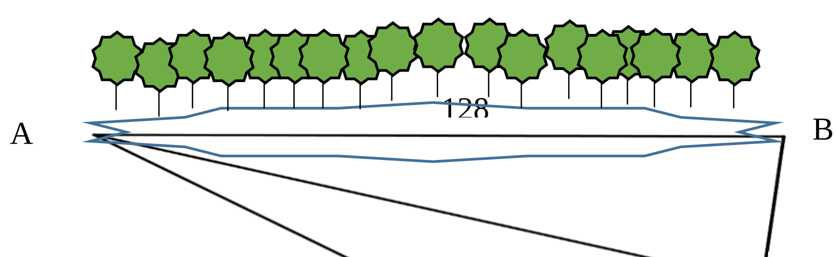
La figura anterior ilustra la demostración. Las marcas en $\overline{AF}$ y $\overline{RF}$ indican que la congruencia $\overline{AF} \cong \overline{RF}$ es un dato. Igualmente, las marcas en $\overline{FB}$ y $\overline{FH}$ indican que $\overline{FB} \cong \overline{FH}$ es un dato. Las marcas en el $\measuredangle AFB$ y en el $\measuredangle RFH$, son ángulos opuestos por el vértice por lo que son congruentes, se dedujo $\Delta FAB \cong \Delta RFH$

Ejemplo: 2. En la figura, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$; $\overline{BD} \cong \overline{CD}$ y el ΔCDR es equilátero. Hallar *x* y α .



Proposición	Razón
$\measuredangle DCB = 20^{o}$	Dado
$\measuredangle DCR = 60^{o}$ $\measuredangle RCD = 60^{o}$	ΔCDR es equilátero
$\measuredangle BCR = 40^{o}$	$\measuredangle BCR = \measuredangle DCR - \measuredangle DCB$
ΔBCD	Por construcción es isósceles
$\measuredangle BDR = 80^{o}$	La suma de los ángulos interiores de un triángulo es180^{o}
$\measuredangle ADB = 40^{o}$	Por ser suplementarios $\measuredangle ADB = 180^{o} - \measuredangle BDR - \measuredangle RCD$
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$	Dado
$\measuredangle ADB \cong \measuredangle BCR$	$\measuredangle ADB = 180^{o} - \measuredangle BDR - \measuredangle RCD$
$\overline{BD} \cong \overline{RC}$	Dado
$\Delta ADB \cong \Delta BRC$	Postulado LAL
$x = \alpha$	$\Delta ADB \cong \Delta BRC$
$\measuredangle BDR = 20^{o} + \alpha$	
$2(20^{o} + \alpha) + 80^{o} = 180^{o}$	ΔBDR es isósceles
$\alpha = 30^{o}$, y $x = 30^{o}$.	

Ejemplo: 3. Un equipo de agrimensores desea encontrar la distancia *AB* a través de un lago. Un método requiere la construcción de un par de triángulos congruentes. Los agrimensores seleccionan un punto cualquiera *C*, miden $\measuredangle ACB$ y ubican un punto *D* de manera que $\measuredangle ACD \cong ACB$ y $\overline{CD} \cong \overline{CB}$. ¿Por qué son congruentes $\measuredangle ACD$ y $\measuredangle ACB$? ¿Cómo puede esto ayudar a encontrar la distancia requerida?



Aplica el criterio de congruencia para conocer lo que se te pide.

1. ¿Qué información conoces? ____
2. ¿Qué criterio de congruencia puedes ocupar? _____________________________
3. ¿Por qué razón?
   ____
4. Entonces que puedes decir al respecto_____________________________________
5. ¿Cómo puede esto ayudar a encontrar la distancia requerida? _________________

APLICAR EL CRITERIO DE CONGRUENCIA ALA DE TRIÁNGULOS, EN PROBLEMAS.

Objetivo: al concluir, el alumno utilizará los criterios de congruencia para resolver problemas.

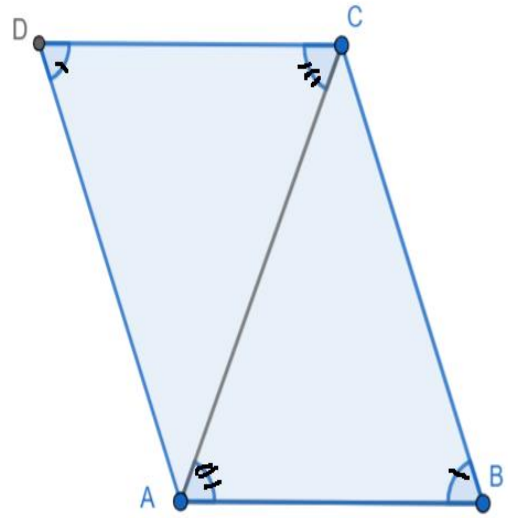
AL ESTUDIANTE debes colocar el criterio que permita determinar si existe congruencia entre los triángulos con la información o bien en caso de que no exista congruencia argumentar la razón.

Dado:

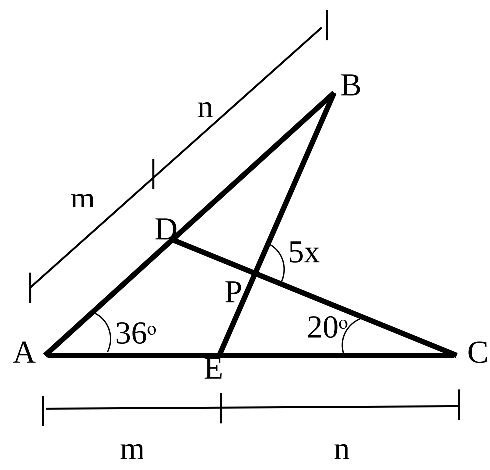
$\measuredangle ADC \cong \measuredangle CBA$

$\overline{DC} \cong \overline{BA}$

Proposición	Razón
$\measuredangle ADC \cong \measuredangle CBA$	Dado
$\overline{DC} \cong \overline{BA}$	Dado
$\measuredangle DCA \cong \measuredangle BAC$	Ángulos alternos internos
$\Delta ADC \cong \Delta ABC$	Postulado ALA



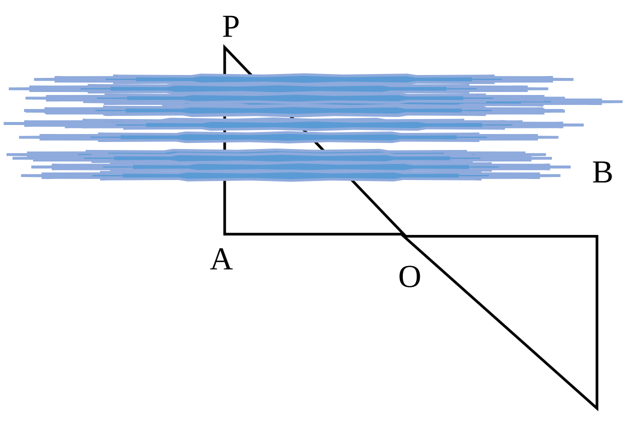
1. En la figura $\overline{AD} \cong \overline{AE}$ y $\overline{DB} \cong \overline{EC}$. Halle el valor de x



Proposición	Razón
$\overline{AD} \cong \overline{AE}$ y $\overline{DB} \cong \overline{EC}$ $AD = AE = m$ $DB = EC = n$	Dado
$\overline{AB} \cong \overline{AC}$ $\measuredangle ABE \cong \measuredangle ACD$ $\overline{EB} \cong \overline{CD}$ $\Delta ABE \cong \Delta ADC$	Postulado ALA
$\measuredangle ACD \cong \measuredangle ABE$ $\measuredangle ACD = \measuredangle ABE = 20^{o}$	$\Delta ABE \cong \Delta ADC$

$\measuredangle BEC = 56^{o}$	Propiedad del ángulo externo en un triángulo
ΔEPC Se tiene : $5x = 56^{o} + 20^{o}$ $x = 15.2^{o}$	Propiedad del ángulo externo en un triángulo

1. Para medir el ancho *AP* de un rio se ejecutaron las operaciones siguientes: De *A* se midió *AB* en dirección perpendicular a *AP*. En el punto medio *O* de *AB* se clavó una estaca. En *B* se levantó una perpendicular a *AB*, y en ella se clavó una estaca en *C*, escogiéndose este punto de suerte que quedase en línea recta con *O* y *P*. El ancho del río se determinó midiendo *BC*. Demuestre la validez del procedimiento.



Ocupando la aplicación de los criterios de congruencia demuestra la validez del procedimiento.

6. ¿Qué información conoces? ____
7. Enlista los elementos que conoces____
8. ¿Con esta información qué criterio de congruencia puedes ocupar? ____
9. ¿Por qué razón? ____
10. Entonces es válido el procedimiento _____________________________________
11. ¿Qué criterio de congruencia estas usando? ______________________________

FIN DE LA ACCIÓN

ACTIVIDAD 2

ACCIÓN 1

COMPRENDER EL CONCEPTO DE SEMEJANZA

Objetivo: al concluir la acción, el alumno debe comprender la importancia y utilidad del concepto de semejanza.

AL ESTUDIANTE: para un aprendizaje eficaz es necesario que comprendas el concepto de semejanza de triángulos, así como su utilidad e importancia

¿QUÉ SIGNIFICA QUE DOS FIGURAS SEAN SEMEJANTES?

En términos de semejanza, los casos más directamente accesibles a las experiencias de la gente son los mapas, las maquetas, las fotografías –entre otras formas- en donde la semejanza es trabajada en términos de “escala” con la finalidad de poder visualizar, conocer, manipular y modificar las diferentes características del entorno.

“Escala” puede significar que *la razón* (cociente o división) entre las magnitudes del objeto real y las de su representación en un mapa, una maqueta o una fotografía *guarda proporcionalidad (es constante)*.

Por ejemplo, una fotografía es una representación a escala de la realidad que capta una lente y la graba, para después ser utilizada con distintos fines, como en la reducción de la figura 4 que muestra dos escalas diferentes. Es decir que estas imágenes *son semejantes* a la imagen real y son semejantes entre sí, puesto que nos muestran las mismas figuras que se ven en la realidad, pero no con el mismo tamaño (entre ellas también mantienen una escala diferente).

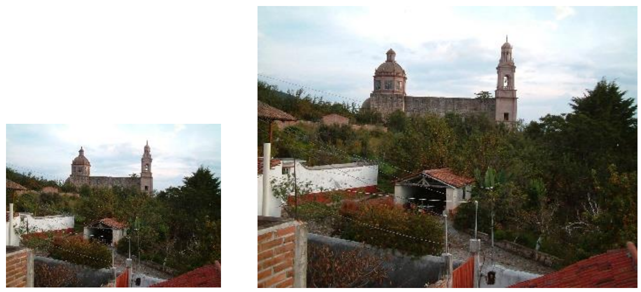


Figura 4

De aquí se puede desprender la siguiente definición de semejanza:

- Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma, aunque no el mismo tamaño, o sea si la razón entre las magnitudes de sus partes correspondientes, mantienen una relación de proporcionalidad (escala).

Recuerda que en la Unidad II de Matemáticas I se dijo “Cuando la razón de dos magnitudes se mantiene constante para todas las variaciones correspondientes entre sí, tenemos una ***variación directamente proporcional***. El valor constante que mantiene la razón se llama ***constante de proporcionalidad***”.

Esta constante de proporcionalidad entre lo real y un mapa, una maqueta o una fotografía es lo que se conoce como ***escala***.

Vamos a entender más a detalle qué significa que una figura guarde una relación de semejanza con figuras reales (que esté a escala): en la siguiente imagen se tiene una toma aérea del CCH plantel Vallejo, tomada del programa *google earth*; en ella se marca el segmento del frente del plantel, el cual mide en la realidad 527.27 metros, (el mismo programa te dice el valor real) aunque tú lo puedes corroborar midiendo todo el frente del CCH.

Figura 5

Veamos que no es necesario hacer la medición físicamente debido a que *tenemos una referencia* del segmento que marca el frente del CCH (mide 527.27 metros), ahora medimos el segmento con un escalímetro; una vez obtenido este dato, tomamos la razón del tamaño real entre el tamaño del segmento en la imagen. Esta razón nos dará el factor de cuánto está reducida la imagen respecto a la real, es decir ya tenemos la escala. Una vez obtenida esta razón es muy fácil saber cuánto mide cada uno de los elementos del plantel (edificios, cancha, estacionamientos, etc.)

En la imagen se muestran tres segmentos correspondientes al estacionamiento, al edificio W y a las canchas de basquetbol, ¿cómo se podría saber cuál es la longitud de cada uno de estos segmentos en la realidad? Es decir, queremos saber qué longitud tienen el estacionamiento, el edificio W y las canchas. Una de las maneras que tenemos para conocerlas es midiéndolos físicamente, es decir tomando un flexómetro y midiendo la longitud de cada uno de los tres elementos mostrados en rojo.

Pero antes de esto hagámoslo teóricamente: sólo basta con medir los objetos representados en la imagen con el escalímetro y multiplicarlos por la escala, para inferir cuál es su medida real, aplicando la proporcionalidad que nos da la semejanza de la foto con el plantel.

Se te pide que en equipo efectúen las mediciones físicas de los tres elementos estudiados y verifiquen si sus cálculos previos fueron o no correctos (con ciertos márgenes de error).

Desde la más remota antigüedad los humanos requirieron hacer mediciones de terrenos con fines de producción o distribución, haciendo para ello mediciones físicas; con el tiempo, recurrieron a planos que contenían las figuras semejantes a las parcelas (los códices prehispánicos ya incluyen mapas de regiones).

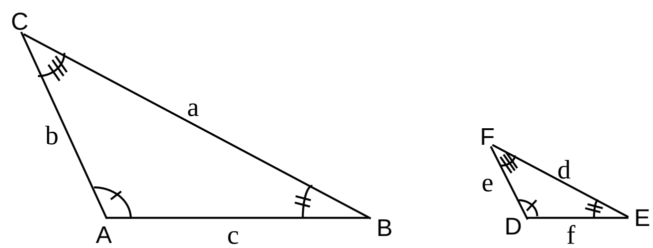
UTILIZAR CORRECTAMENTE LA NOTACIÓN PROPIA DE LA SEMEJANZA.

AL ESTUDIANTE: para un aprendizaje eficaz de la semejanza es necesario que domines el uso adecuado de la notación. Esta acción está dedicada a ello.

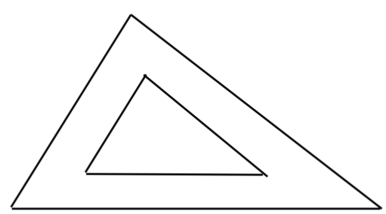
Hemos visto reiteradamente la importancia práctica y conceptual del triángulo. Ahora vamos a estudiar la propiedad de semejanza en esta figura geométrica. Empezamos dando la definición:

- Dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes y sus lados guarden entre ellos una relación de proporcionalidad.

En el código (o lenguaje) de la geometría sintética para describir que los triángulos ΔABC y ΔDEF son semejantes usaremos una tilde $\sim$ la cual nos denotará que las figuras son semejantes, por ejemplo $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ significa que $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$ y que $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$. La representación geométrica se ilustra abajo.



En las escuadras de los juegos de geometría siempre encuentras triángulos semejantes.



RECONOCER CUÁNDO DOS FIGURAS SON SEMEJANTES.

AL ESTUDIANTE: es necesario que logres identificar las características que se deben de cumplir para que las figuras sean semejantes.

FIGURAS SEMEJANTES.

Mira las siguientes figuras y contesta las preguntas

¿En que se parecen?

Los dos son ____

¿En qué se diferencian?

Él  es ____

Él  es ____

Se diferencia en __________________________________

¿En que se parecen?

Las dos son ____

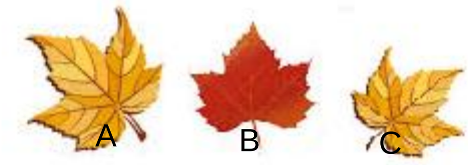
¿En qué se diferencian?

La 
es_____________________________________

La  es __________________________________

Su diferencia es __________________________________

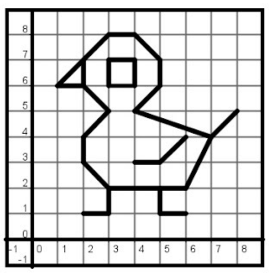
De las siguientes figuras, hay dos semejantes

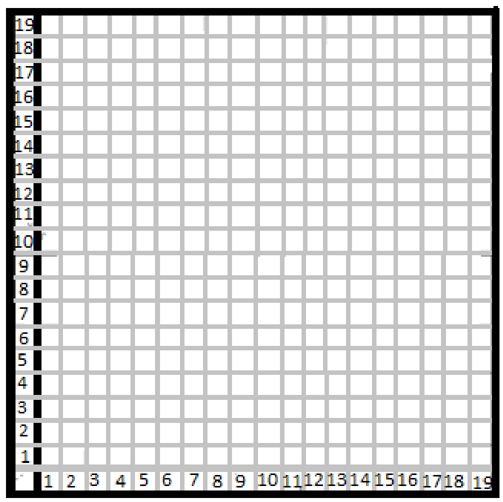


¿Cuáles son? ___________________________________

¿Por qué? ___________________________________

Mediante la técnica de cuadriculado, haz un pato semejante al que se muestra, pero del doble de tamaño.





Observa las siguientes figuras e indica si son semejantes entre sí y por qué:

A

8 cm

5 cm

B

7.5 cm

12 cm

C

9 cm

13 cm

Las figuras A y B son _______________ ¿por qué? _________________________
____

Las figuras A y C son _______________ ¿por qué? _________________________
____

Las figuras B y C son _______________ ¿por qué? _________________________
____

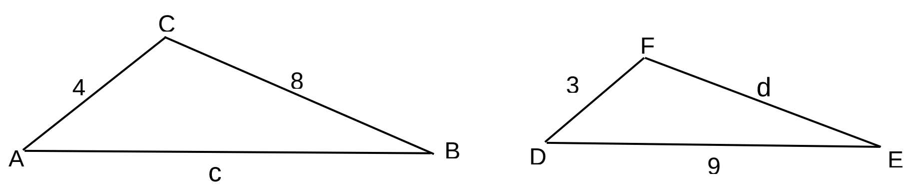
FIN DE LA ACCIÓN

ACCIÓN 2
TRIÁNGULOS SEMEJANTES CON BASE EN LA DEFINICIÓN

Objetivo: al concluir la acción, el alumno debe de reconocer cuando dos triángulos son semejantes con base a la definición.

AL ESTUDIANTE: en este momento comprendes a que se refiere cuando se habla de semejanza, por lo que ahora es importante que conozcas la definición de semejanza y que con ello logres reconocer en qué momento se dice que son triángulos semejantes.

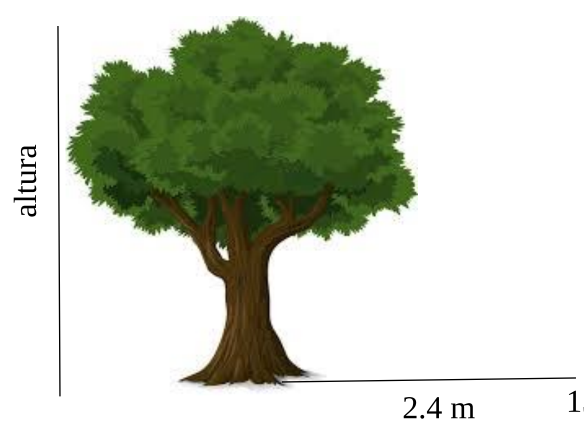
Si $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, encuentra los valores de c y d.

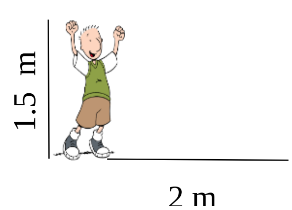


Solución. Para obtener el valor de c, tomamos de la triple proporcionalidad que estipula la semejanza de los triángulos $\frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ para sustituir los valores conocidos y despejar la incógnita: $\frac{4}{3} = \frac{c}{9}$ despejando c obtenemos $c = \frac{9 \times 4}{3} = 12$.

De igual forma encuentra el valor de d: d =_______________

¿Cuál es la altura de un árbol, que proyecta una sombra de 2.4 metros? si al mismo tiempo un chico de 1.5 metros de altura proyecta una sombra de 2 metros.





Que figura se forma al unir la altura del árbol y su sobra

____

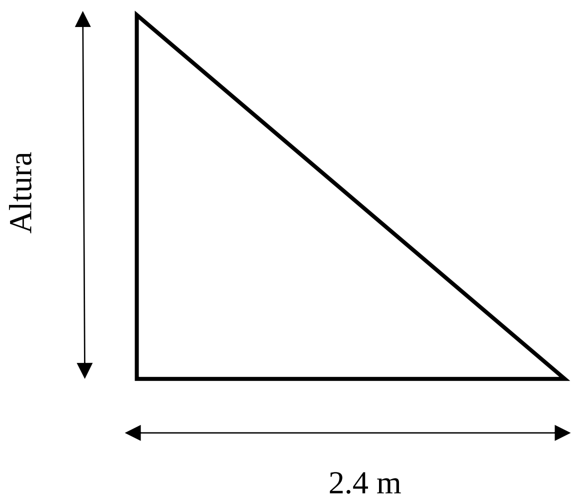
Que figura se forma al unir la altura del niño y su sobra

____

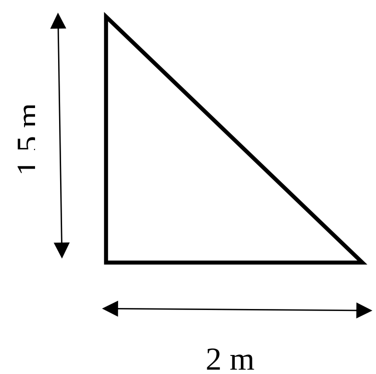
Que tienes que hacer si quieres saber cuál es la altura del árbol

____

¡Muy bien!!! Como lo mencionaste al unir los extremos de la altura del árbol y su sombra se forma un triángulo, de igual manera al unir la altura del niño con su sombra se forma un triángulo.



Representación del árbol



Representación del chico

Por lo que identificamos dos triángulos, en donde podemos decir que sus lados correspondientes son proporcionales, de aquí se tiene:

$$\frac{altura\ del\ árbol}{altura\ del\ niño} = \frac{sombra\ del\ árbol}{sombra\ del\ niño}$$

$$\frac{altura\ del\ árbol}{1.5} = \frac{2.4}{2}$$

Despejando la altura del árbol tenemos

$$altura\ del\ árbol = \frac{(2.4)\ (1.5)}{2}$$

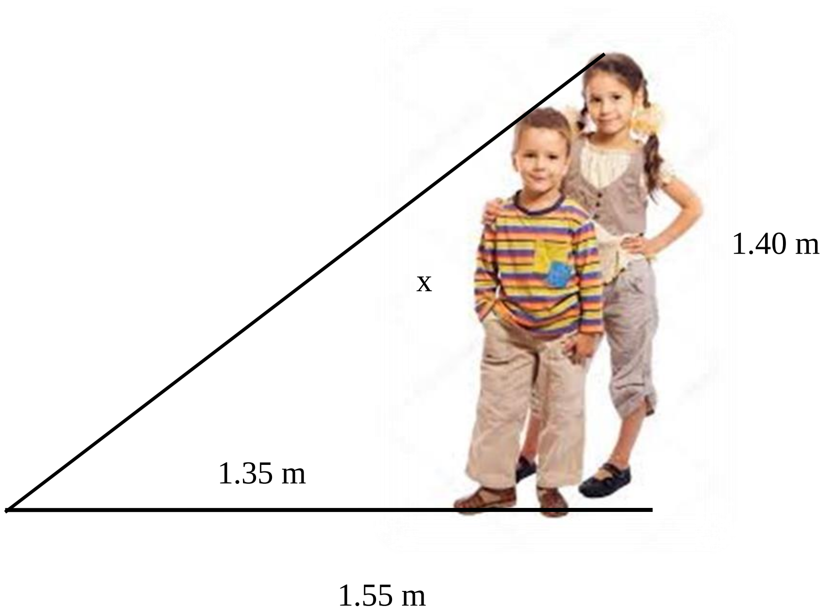
Simplificando nos queda:

$$altura\ del\ árbol = 1.8$$

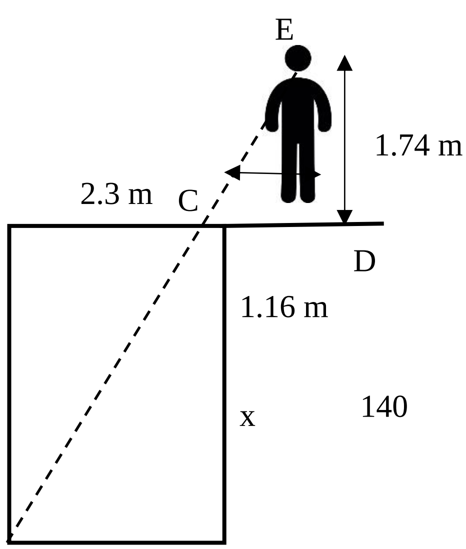
Lo que significa que el árbol mide 1.8 metros.

Ejercicios:

1. Calcula la altura de Juan sabiendo que proyecta una sombra de 1.35 metros en el momento en que Sandy, que mide 1,40 m, proyecta una sombra de 1.55 metros.



2. Una piscina tiene 2.3 metros de ancho, situándose a 1.16m del borde, desde una altura de 1.74 metros, observamos que la visual une el borde de la piscina con la línea del fondo. ¿Qué profundidad tiene la piscina?



CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS (LAL, LLL Y AAA)

Objetivo: al concluir la acción, el alumno debe establecer como válidos los criterios de semejanza

AL ESTUDIANTE es importante que conozcas cuáles son los criterios de semejanza de triángulos y comprendas el procedimiento.

CRITERIOS DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS (LAL, LLL Y AAA)

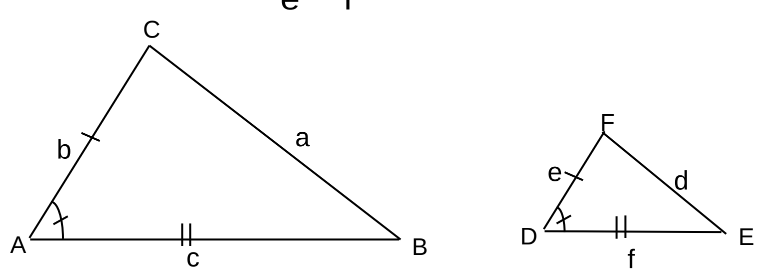
Al igual que los criterios LAL, LLL y ALA de congruencia de triángulos están los criterios LAL, LLL y AAA para la semejanza de los triángulos.

CRITERIO DE SEMEJANZA LAL

- Si dos lados de un triángulo guardan proporcionalidad con dos lados de otro triángulo y si los ángulos formados por esos lados son congruentes entonces ambos triángulos son semejantes.

En el lenguaje de la geometría sintética esto se escribe así:

Si en ΔABC y ΔDEF se tiene que $\frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ y $\angle A \cong \angle D$ entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

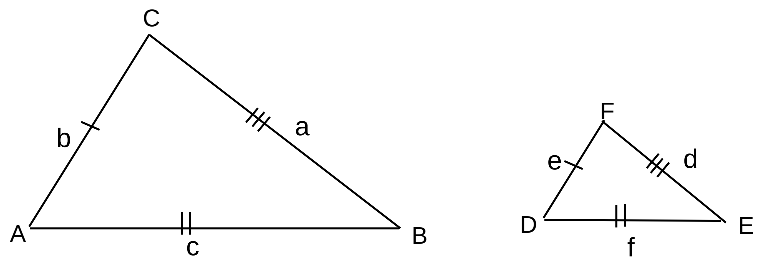


CRITERIO DE SEMEJANZA LLL

- Si los tres lados de un triángulo guardan proporcionalidad con los tres lados de otro triángulo entonces ambos triángulos son semejantes.

En el lenguaje de la geometría sintética esto se escribe así:

Si en $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ se tiene que $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$ entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

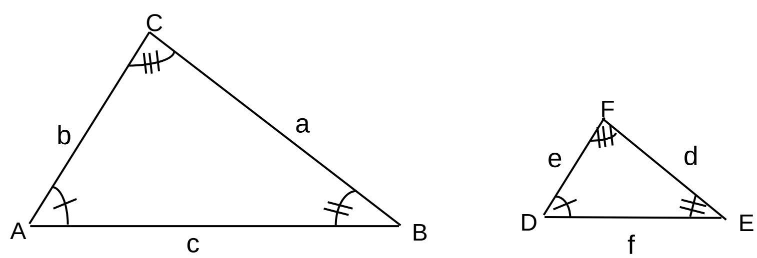


CRITERIO DE SEMEJANZA AAA

- Si los tres ángulos de un triángulo son congruentes respectivamente con los tres ángulos de otro triángulo entonces ambos triángulos son semejantes.

En el lenguaje de la geometría sintética esto se escribe así:

Si en $\triangle ABC$ y $\triangle DEF$ se tiene que $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$ y $\angle C \cong \angle F$ entonces $\triangle ABC \sim \triangle DEF$



Debido a que la suma de los ángulos de un triángulo es 180° basta con que dos ángulos sean congruentes para que los triángulos sean semejantes. De hecho, el criterio se simplifica al **CRITERIO AA**

RAZÓN ENTRE PERÍMETROS Y ENTRE ÁREAS DE TRIÁNGULOS SEMEJANTES.

Objetivo: al concluir la acción, el alumno debe comprender la razón entre perímetros y áreas de triángulos semejantes.

AL ESTUDIANTE es importante que conozcas lo que representa las razones entre perímetros y áreas.

Relación entre los perímetros de figuras semejantes.
La razón entre los perímetros de dos polígonos semejantes es igual a la razón de semejanza:

$$\frac{P}{P'} = r$$

El perímetro de un polígono es de 25 cm y el de otro 10 cm. Si ambos son semejantes, Calcula la razón de semejanza que transforma el mayor en el menor.

$$\frac{P}{P'} = \frac{25}{10} = 2.5$$

Calcula la razón de semejanza que transforma el menor en el mayor.

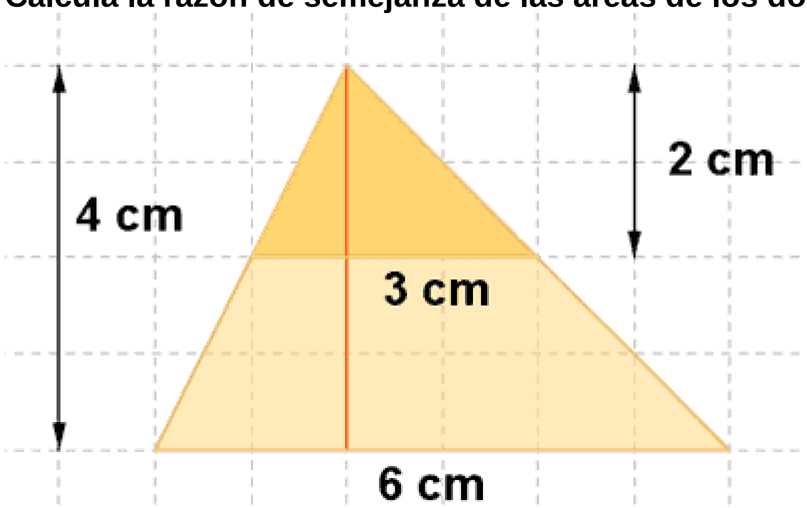
$$\frac{P}{P'} = \frac{10}{25} = 0.4$$

Relación entre las áreas de figuras semejantes.

La razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza:

$$\boldsymbol{\frac{A}{A'} = r^2}$$

Calcula la razón de semejanza de las áreas de los dos triángulos de la figura.



Solución:

$$A_1 = \frac{base\ x\ altura}{2} = \frac{6\ x\ 4}{2} = 12\ cm^3$$

$$A_2 = \frac{base\ x\ altura}{2} = \frac{3\ x\ 2}{2} = 3cm^3$$

Utilizando la razón entre las áreas tenemos:

$$\frac{A_1}{A_2} = r^2$$

$$\frac{12}{3} = 4 = r^2$$

$$r = 2$$

La razón de semejanza de los triángulos es de 2 cm.

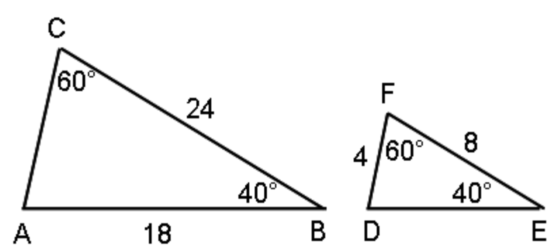
APLICACIÓN DE LOS CRITERIOS DE SEMEJANZA.

Objetivo: al concluir, el alumno debe conocer las aplicaciones y utilidad de los criterios de semejanza.

AL ESTUDIANTE es importante que conozcas en donde se puede usar los criterios de semejanza y conocer sus beneficios y utilidades.

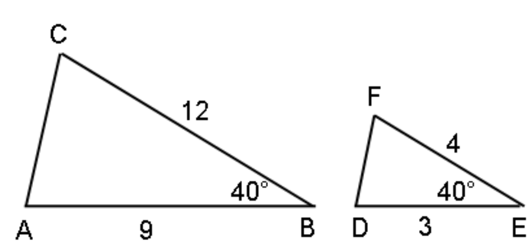
APLICACIÓN DE LOS CRITERIOS DE SEMEJANZA.
EJERCICIOS

Ejercicio 1. Di qué criterio de semejanza nos permite afirmar que los triángulos ∆ABC y ∆DEF que se muestran a la derecha son semejantes _____________. Calcula el tercer lado que se desconoce en cada triángulo.



Respuesta.

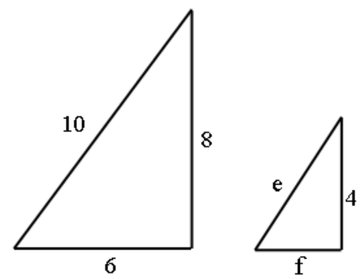
Ejercicio 2. Di qué criterio de semejanza nos permite afirmar que los triángulos ∆ABC y ∆DEF que se muestran a la derecha son semejantes _____________. Calcula el tercer lado que se desconoce en cada triángulo.



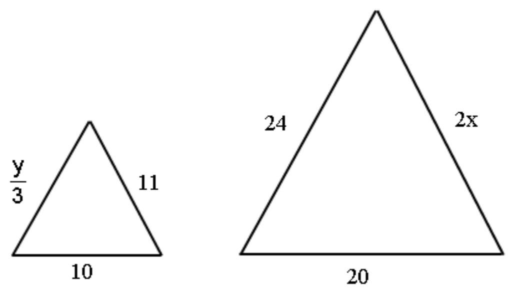
Respuesta.

En cada uno de los siguientes ejercicios los triángulos son semejantes. Encuentra la longitud de los lados que no se dan y el valor de las incógnitas.

Ejercicio 3.
Respuesta.

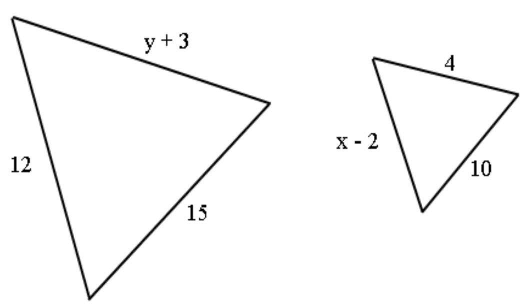


Ejercicio 4.
Solución.



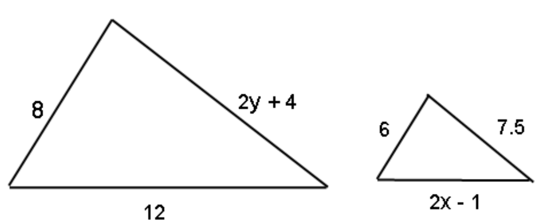
Ejercicio 5.

Respuesta.



Ejercicio 6.

Respuesta.



FIN DE LA ACCIÓN

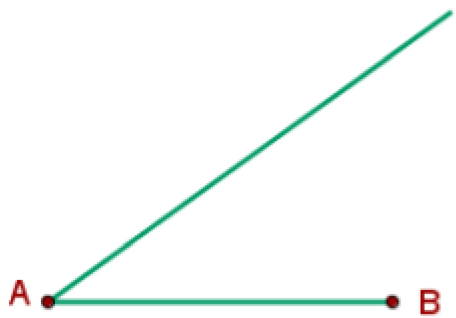
ACCION 3.
TEOREMA DE THALES.

Objetivo: al concluir la acción, el alumno debe conocer el teorema de Thales

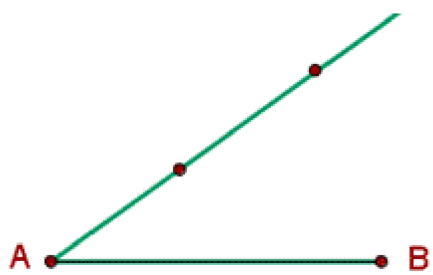
AL ESTUDIANTE es importante que reconozcas la importancia que tiene el Teorema de Thales

TEOREMA DE THALES.

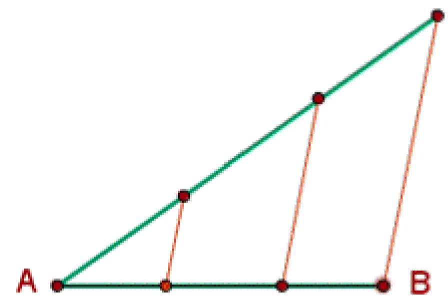
Divide el $\overline{AB}$ en tres partes iguales.



Tomando como unidad cualquier medida, se señalan en la semirrecta 3 unidades de medida a partir de A.



Por cada una de las divisiones de la semirrecta se trazan rectas paralelas al segmento que une B con la última división sobre la semirrecta. Los puntos obtenidos en el segmento AB determinan las 3 partes iguales en que se divide.

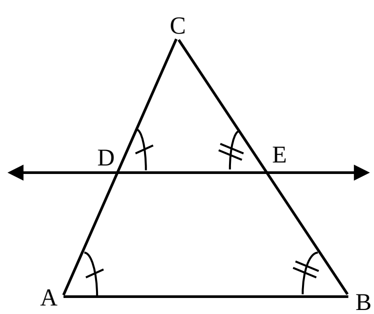


El siguiente teorema se conoce como teorema de **Tales de Mileto** (siglo VI a.n.e.)
Proposición 16. Toda recta paralela a un lado de un triángulo que corte a los otros dos lados determina un triángulo semejante al triángulo original.

Veamos de otra manera que dice este teorema:

Proposición 16. Si en un ΔABC una recta paralela al lado $\overline{AB}$ intercepta los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en los puntos D y E, respectivamente: entonces $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.

Demostración.



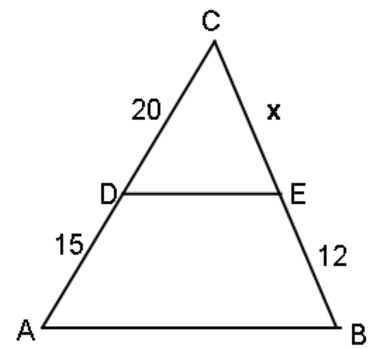
Afirmaciones	Razones
$\angle A \cong \angle D$	Por ser correspondientes
$\angle B \cong \angle E$	Por ser correspondientes
$\Delta ABC \sim \Delta DEC$	Por criterio AA

La proporcionalidad que establece la semejanza es:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$$

EJERCICIOS

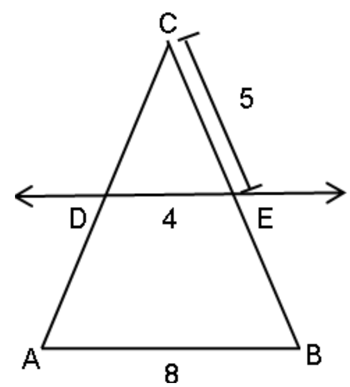
Ejercicio 7. El segmento DE es paralelo al lado AB del ΔABC. Calcula el valor de la incógnita **x** que es la longitud del lado CE del ΔDEC.



Respuesta.

¿El ΔABC es isósceles? ___________

Ejercicio 8. Si ΔABC es isósceles con AB = BC y la recta DE es paralela al segmento AB como se muestra en la figura de la derecha, entonces calcula las longitudes de los lados restantes en los triángulos ΔABC y ΔDEC.



Respuesta.

La siguiente proposición consiste en dividir un triángulo rectángulo en dos triángulos rectángulos manteniendo la relación de semejanza entre los tres triángulos. Antes de pasar a su formulación y demostración desarrolla una práctica para que manipules estos tres triángulos y construyas la triple semejanza con tus propias manos.

La práctica es la siguiente: en una tira de cartulina dibuja dos triángulos rectángulos congruentes de tamaño grande, con los vértices marcados con las mismas letras A, B y C, salvo que en uno de ellos van a estar marcados por dentro y es con el que se va a trabajar. Usando regla y compás o un juego de escuadras traza la altura con respecto a la hipotenusa en el triángulo que tiene escritos los ángulos por dentro, formándose así dos triángulos rectángulos en los cuales debes escribir los vértices dentro de los triángulos e iluminarlos con diferente color, como se ilustra en la figura 7

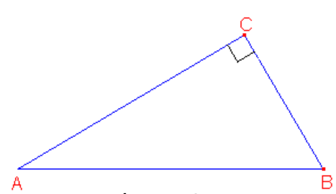


Figura 6

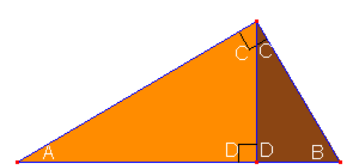


Figura 7

Corta los triángulos ΔACD y ΔBCD, e ilumina las caras anversos con el mismo color y marca los vértices. Ahora coloca los triángulos que cortaste sobre el ΔABC de la figura 6 de tal forma que coincidan en el vértice A como se ilustra en la figura 8. Con dicho dispositivo ya puedes conjeturar la semejanza de los triángulos ΔABC y ΔBCD. Retira el

ΔBCD de la figura 8 y con base en la figura 9 puedes conjeturar la semejanza de los triángulos ΔABC y ΔACD. Con esto ya tienes identificada la semejanza entre los tres triángulos, pero el orden de los vértices no es el adecuado entre los ángulos congruentes y por lo tanto no se puede escribir en forma correcta la proporcionalidad. Las mismas figuras 8 y 9 te dicen el orden adecuado de los vértices, escribe después de las figuras correctamente las semejanzas y también la proporcionalidad conjunta entre los tres triángulos.

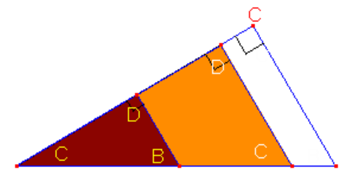


Figura 8

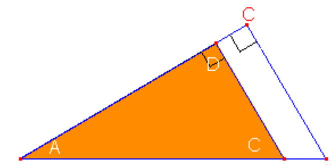
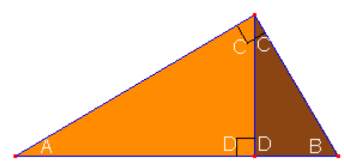


Figura 9

$$\Delta ABC \sim \Delta\underline{\qquad} \sim \Delta\underline{\qquad} \qquad \frac{\overline{AB}}{\_\_\_} = \frac{\overline{AC}}{\_\_\_} = \frac{\overline{BC}}{\_\_\_} = \frac{\overline{AB}}{\_\_\_} = \frac{\overline{AC}}{\_\_\_} = \frac{\overline{BC}}{\_\_\_}$$

Pasemos ahora a ver el teorema y su demostración.

Proposición 17. En un triángulo rectángulo la altura correspondiente a la hipotenusa genera dos nuevos triángulos rectángulos congruentes entre los tres.



Demostración. Sea ΔABC rectángulo en donde ∠C es el ángulo recto y sea $\overline{CD}$ la altura con respecto a la hipotenusa. Con la altura se generan los triángulos ΔACD y ΔBCD rectángulos siendo en ambos ∠D el ángulo recto y el ∠C se ha dividido dejando de ser recto en estos dos triángulos. En la tabla de abajo demostramos ΔABC ~ ΔCBD y este es el orden correcto de los vértices porque los ángulos rectos ∠C y ∠D de cada triángulo están en tercer lugar y el ∠B está en la posición intermedia en ambos casos.

Afirmaciones	Razones
∠B ≅ ∠B	Es el mismo ángulo
∠C ≅ ∠CDB	Ambos son rectos
ΔABC ~ ΔCBD	Por criterio AA

De igual forma demostramos en la tabla siguiente que ΔABC ~ ΔACD y por las mismas razones el orden de los vértices es el correcto.

Afirmaciones	Razones
∠A ≅ ∠A	Es el mismo ángulo
∠C ≅ ∠CDA	Ambos son rectos

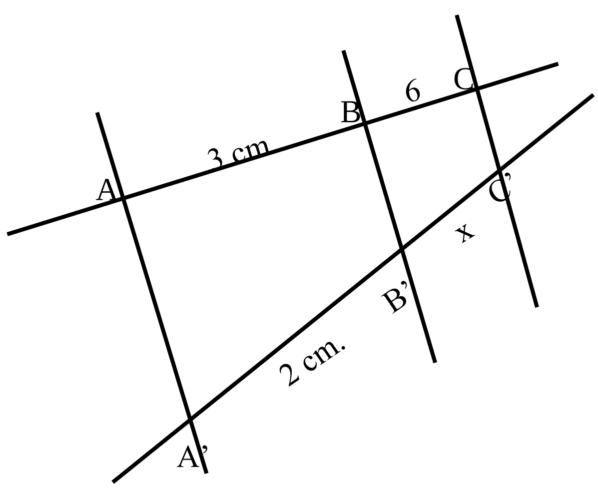
∆ABC ~ ∆ACD	Por criterio AA

La triple semejanza nos da la siguiente relación de proporcionalidad:

$$\underbrace{\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}}_{\Delta ABC\sim\Delta CBD}=\underbrace{\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{CD}}}_{\Delta ABC\sim\Delta ACD}=\underbrace{\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}}_{\Delta CBD\sim\Delta ACD}$$

Ejemplos:

Las rectas a, b y c son paralelas. Halla la longitud de x



$$\boldsymbol{\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}}$$

$$\boldsymbol{\frac{3}{2}=\frac{9}{2+x}=\frac{6}{x}}$$

$$\boldsymbol{\frac{3}{2}=\frac{6}{x}}$$

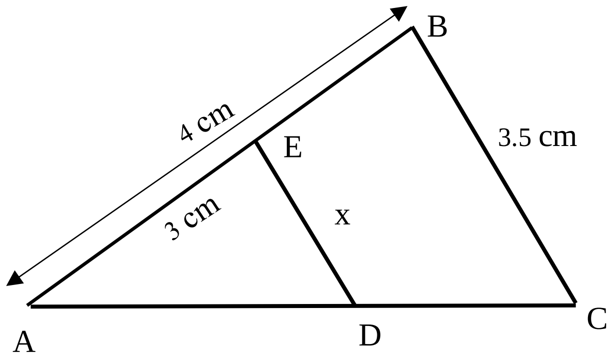
$$\boldsymbol{3x=6(2)}$$

$$\boldsymbol{3x=12}$$

$$\boldsymbol{x=\frac{12}{3}}$$

$$\boldsymbol{x=4}$$

Usar el Teorema de Thales para calcular x



$$\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{ED} = \frac{AC}{AD}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{3.5}{x} = \frac{AC}{AD}$$

$$\frac{4}{3} = \frac{3.5}{x}$$

$$4x = 3.5(3)$$

$$4x = 10.5$$

$$x = \frac{10.5}{4}$$

$$x = 2.625$$

FIN DE LA ACCIÓN

ACTIVIDAD 3

ACCION 1
TEOREMA DE PITÁGORAS

Objetivo: al concluir la acción, el alumno debe de reconocer y justificar el Teorema de Pitágoras, desde el punto de vista algebraico y geométrico.

AL ESTUDIANTE es importante que reconozcas el Teorema de Pitágoras.

TEOREMA DE PITÁGORAS

El **Teorema de Pitágoras** es uno de los teoremas más conocidos y estudiados del mundo. Fue desarrollado por el matemático y filósofo griego Pitágoras de Samos. Este teorema cuenta con un gran número de demostraciones diferentes, utilizando métodos muy diversos.[5] Se cree que Pitágoras demostró el teorema mediante semejanza de triángulos. El teorema lo enunciamos en la siguiente proposición:

[5] Autores, como el matemático estadounidense E. S. Loomis, catalogó 367 pruebas diferentes en su libro de 1927 *The Pitagoream Proposition*. En ese mismo libro, Loomis clasificaría las demostraciones en cuatro grandes grupos: las **algebraicas**, donde se relacionan los lados y segmentos del triángulo; **geométricas**, en las que se realizan comparaciones de áreas; **dinámicas** a través de las propiedades de fuerza, masa, y las **cuaterniónicas**, mediante el uso de vectores.

Proposición 18. En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

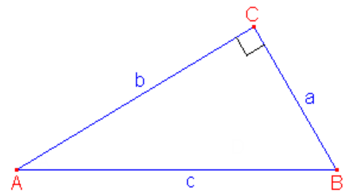


Figura 1

De la figura 1 el teorema de Pitágoras establece que:

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Demostración 1 (algebraica según Loomis)

Dado el triángulo rectángulo ΔABC, se quiere demostrar que $a^2 + b^2 = c^2$.

Se traza la altura con respecto a la hipotenusa y sea D, el pie de altura, formándose los dos nuevos triángulos rectángulos ΔACD y ΔCBD. Pongamos AD = d y DB = e con esto tenemos que d + e = c (ver figura 11).

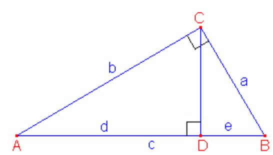


Figura 2

En el teorema anterior se demostró la triple semejanza ΔABC ~ ΔCBD ~ ΔACD y se mostró la triple proporcionalidad. De la semejanza ΔABC ~ ΔCBD destacamos la proporción $\frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$ y de la semejanza ΔABC ~ ΔACD destacamos $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$.

Relacionándolas la longitud de los lados del ΔABC en la figura 11 se tiene:

De la primera proporción se obtiene $\frac{c}{a} = \frac{a}{e}$, de esto se desprende que **a^2 = ce**.

La segunda proporción equivale a $\frac{c}{b} = \frac{b}{d}$, de lo cual se obtiene **b^2 = cd**.

Si sumamos término a término, ambas igualdades se tienen que: **$a^2 + b^2$ = ce + cd**

Factorizando **c** en el segundo término se tiene **$a^2 + b^2$ = c(e + d)**

Pero **e + d = c** de aquí se desprende que **$a^2 + b^2 = c^2$**

Esto es lo que queríamos demostrar.

Como se explicó anteriormente, el teorema de Pitágoras cuenta con diversas demostraciones, vamos a realizar otra demostración análoga a la precedente, donde una vez más se vincularán los lenguajes algebraico y geométrico, si bien ahora usaremos congruencia de triángulos (y manejo de áreas como preámbulo para la siguiente unidad).

Demostración 2 (según Loomis geométrica)

Construyamos un cuadrado (Figura 12) cuyos lados tengan como longitud la suma de los catetos a + b del ΔABC de la figura 11. Dentro de este cuadrado dibujamos el ΔABC cuatro veces como se ve en la figura 11, formándose un cuadrilátero regular con hipotenusa común a todos de longitud c. Demostraremos que es un cuadrado.

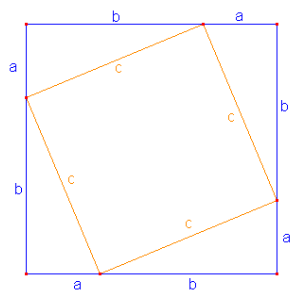


Figura 3

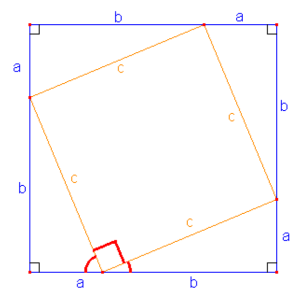


Figura 4

Los tres ángulos marcados en la figura 4 en uno de los vértices del cuadrilátero interior suman 180°; los ángulos exteriores al cuadrilátero en ese vértice son complementarios por ser los ángulos no rectos del ΔABC. Por lo tanto, el ángulo del cuadrilátero interno mide 90°.

Ahora se tiene que el área del cuadrado mayor es el área del cuadrado menor más la suma de las áreas de los cuatro triángulos.

El área del cuadrado mayor es $(a+b)^2$

El área del cuadrado menor es c^2

El área de cada uno de los triángulos es $\frac{1}{2}ab$

Igualando lo anterior tenemos que $(a+b)^2 = c^2 + 4(\frac{1}{2}ab)$

Desarrollando los paréntesis se tiene $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

Simplificando $a^2 + b^2 = c^2$

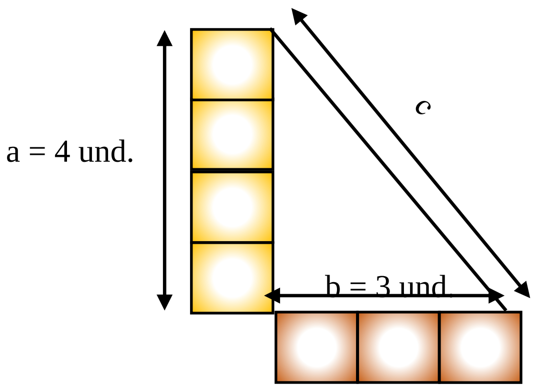
Que es lo que se quería demostrar.

Demostración 3 (geométrica)

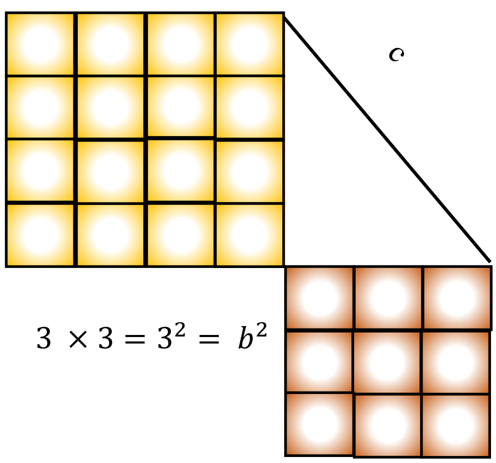
El Teorema de Pitágoras dice que el área de un cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos del triángulo.

Cada  mide 1 unidad.

Por lo que tenemos:



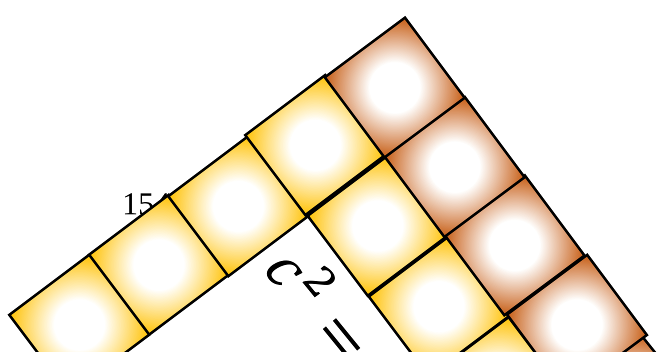
Lo que nos da:

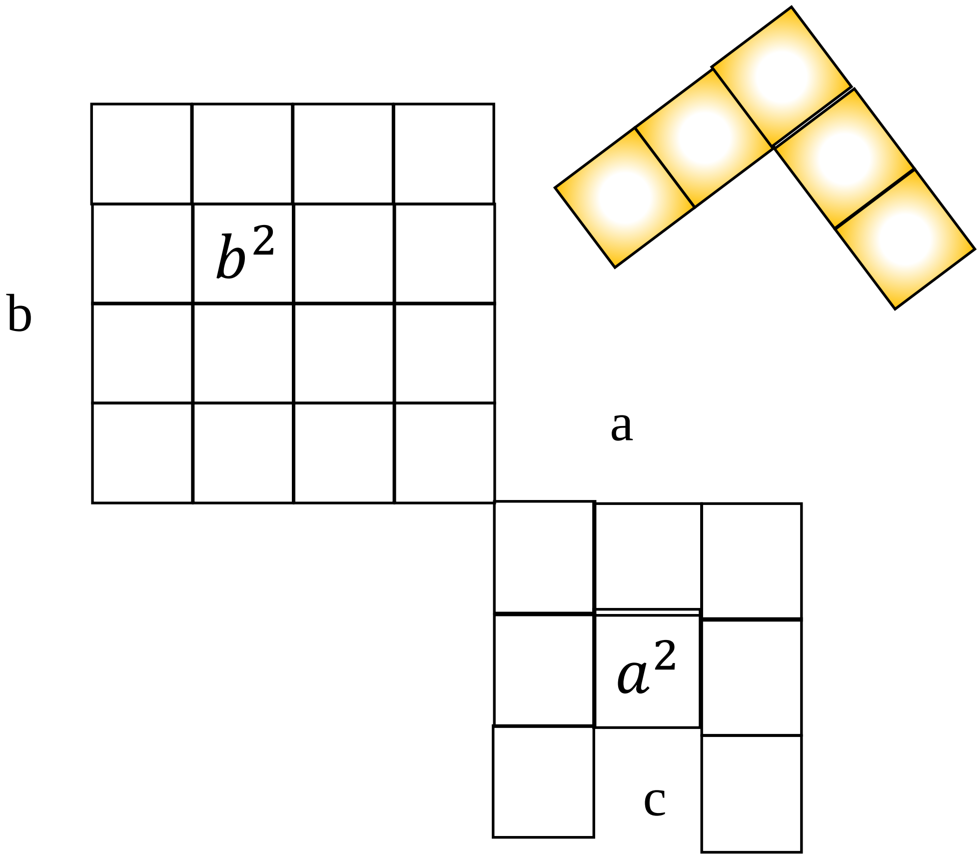


$$4 \times 4 = 4^2 = a^2$$

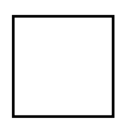
$$3 \times 3 = 3^2 = b^2$$

Al transponer los cuadrados en la hipotenusa nos queda:





Por lo que el Teorema de
Pitagoras nos dice que: $c^2 = a^2 + b^2$



FIN DE LA ACCIÓN

ACCION 2
TEOREMA DE LA ALTURA DE UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO.

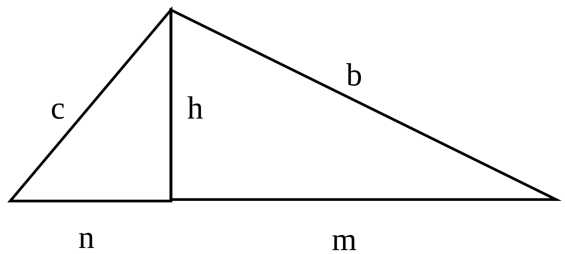
Objetivo: al concluir la acción, el alumno debe de conocer y comprender el Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.

AL ESTUDIANTE es importante que conozcas el Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.

Teorema de la altura de un triángulo rectángulo.

El teorema de “la altura de un triángulo rectángulo” establece que:

En cualquier triangulo rectángulo la altura relativa a la hipotenusa es la media geométrica entre las proyecciones ortogonales de los catetos sobre la hipotenusa.



Demostración.
La altura del triángulo rectángulo ABC lo divide en dos triángulos rectángulos semejantes, de forma que:

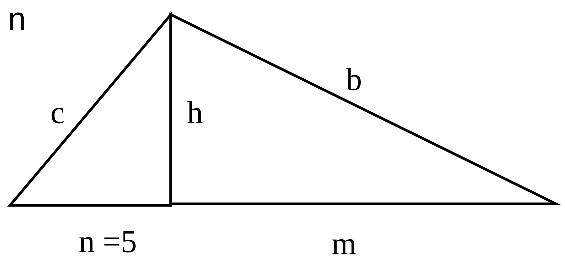
$$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$$

Multiplicando los dos miembros de la igualdad por hn se tiene:

$$h^2 = mn$$

$$h = \sqrt{mn}$$

Ejemplo
Calcular el valor de n



Utilizando el Teorema de la Altura:

$\frac{h}{n} = \frac{m}{h}$ entonces $h^2 = mn$

Por lo que tenemos:

$$\frac{h}{5} = \frac{8}{h}$$
$$h^2 = 8\,(\,5)$$
$$h^2 = 40$$
$$h = \sqrt{40}$$

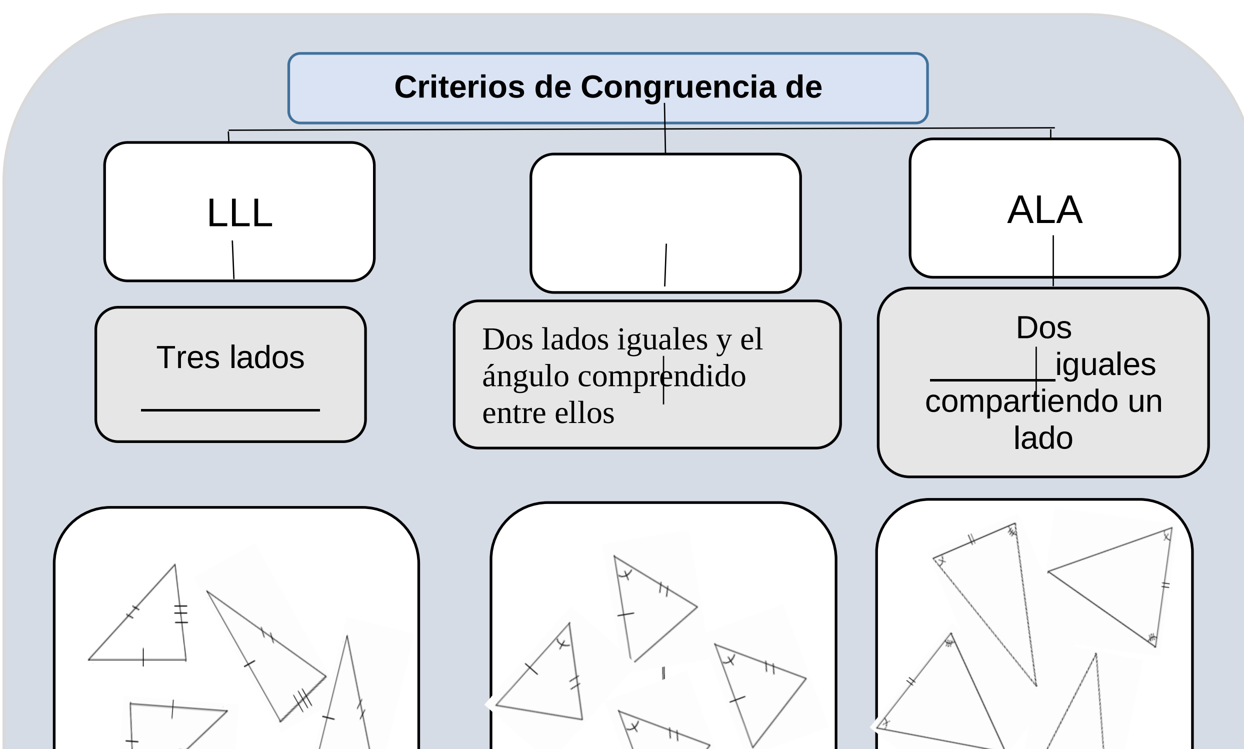
$h = 6.32$ aprox.

FIN DE LA ACCIÓN

SERIE DE EJERCICIOS.

I. Completa el siguiente cuadro sinóptico.

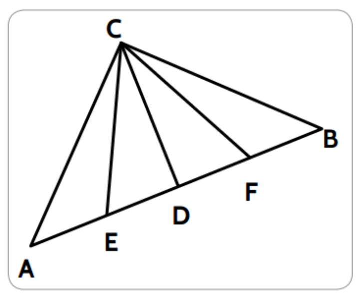
Triángulos congruentes con lenguaje matemático.

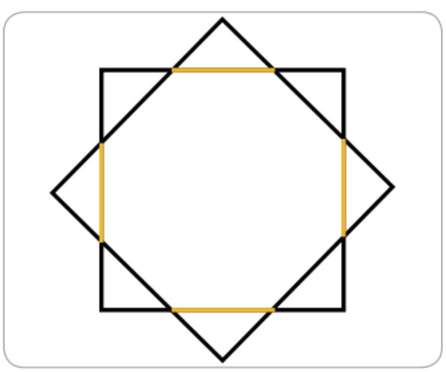


II. Resuelve las siguientes situaciones aplicando los criterios de congruencia de triángulos.

a) En la figura, se tiene un triángulo ABC isósceles $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ y se ha dividido su base $\overline{AB}$ en 4 partes iguales. ¿Cuáles triángulos son congruentes? Justifica tu respuesta con la demostración.

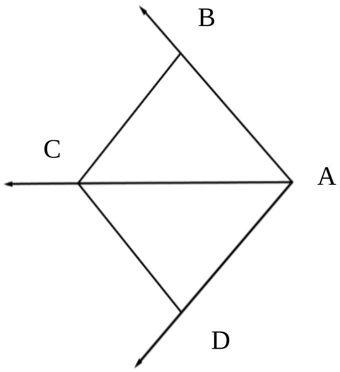
b) En la figura, se ha superpuesto un cuadrado sobre otro congruente, formando un octágono regular. ¿Cuáles triángulos son congruentes? Justifica tu respuesta con la demostración



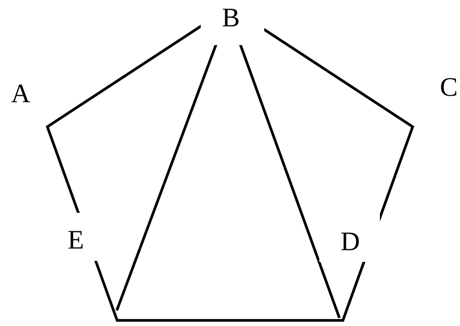


III. Pruebe que los triángulos son congruentes.

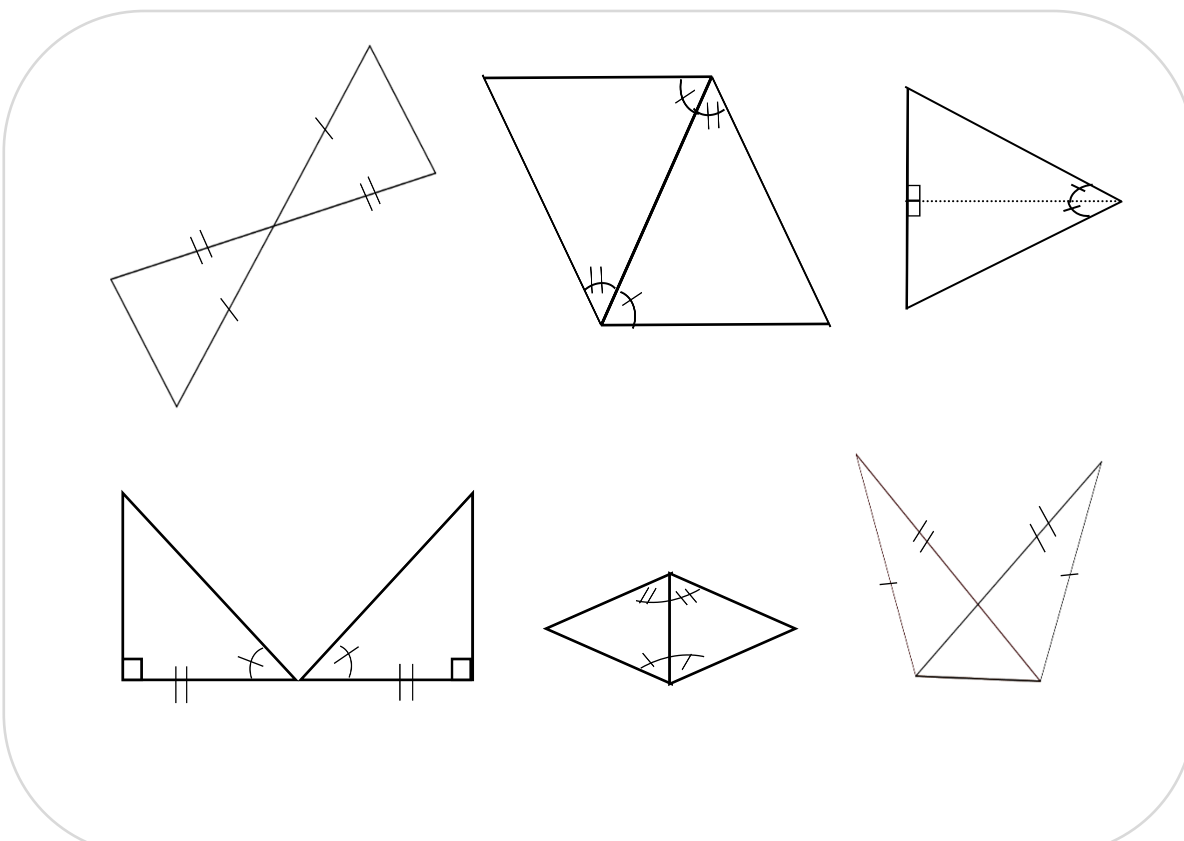
Dado $\overline{AC}$ es la bisectriz de $\measuredangle BAD$
$\overline{AB} \cong \overline{AD}$
Demuestra $\Delta BAC \cong \Delta DAC$



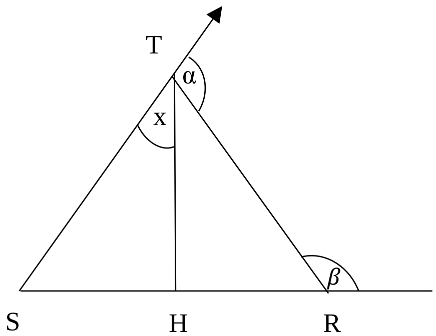
Dado que *ABCD* es un Pentágono regular
Demuestra $\Delta AEB \cong \Delta CDB$



IV. Define a qué criterio de congruencia pertenece cada par de triángulos congruentes

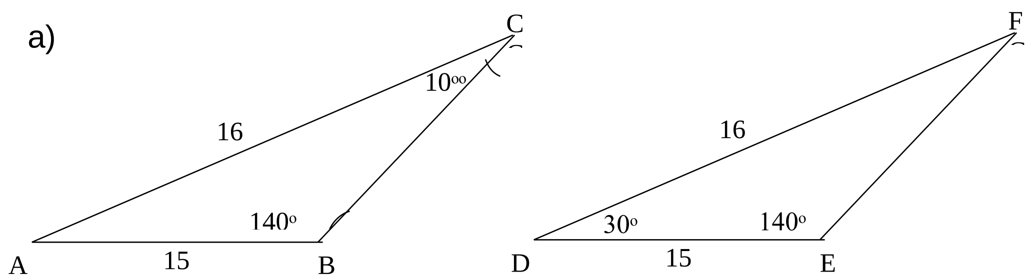


V. En el triángulo *SRT*, $\overline{TH}$ es altura, $\alpha = 110^{\circ}$ y $\beta = 140^{\circ}$ ¿Cuál es la medida del ángulo *x*?



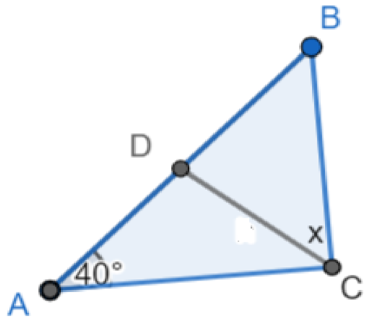
VI. En los siguientes casos indica porque son congruentes los triángulos y halla su valor.

a)

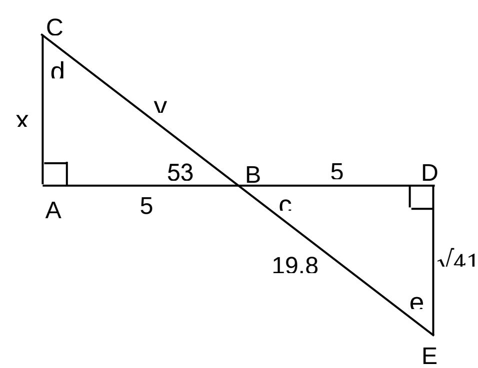


b)

En el ΔABC, $\overline{AD} \cong \overline{CD} \cong \overline{DB}$

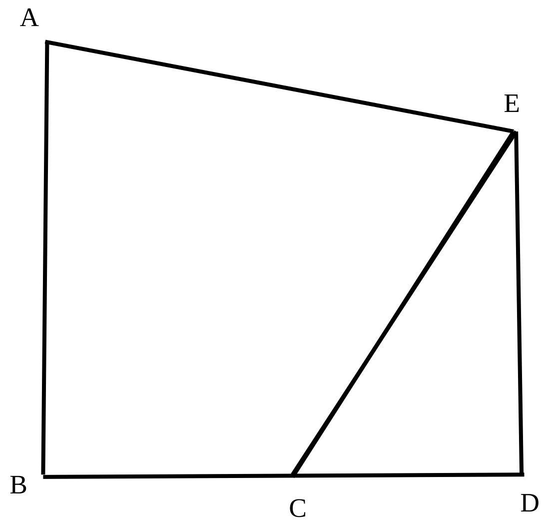


c)

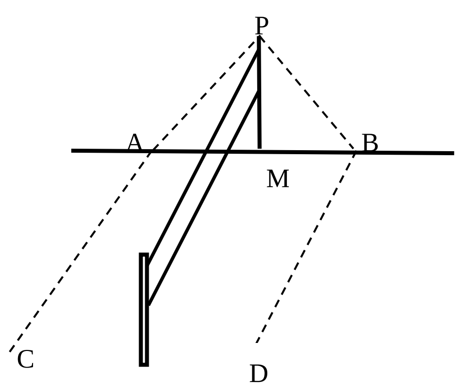


d)

$\overline{AE} \cong \overline{EC};\ \overline{AE} \perp \overline{EC}; \overline{AB} \perp \overline{BC};$
$\overline{ED} \perp \overline{DC}. Si\ \overline{BC} = 3\ y\ \overline{ED} = 5, Hallar\ \overline{AB}.$

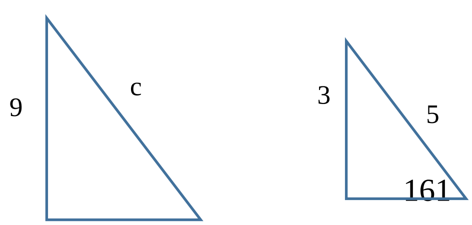


VII. En un gimnasio, el extremo de una red de voleibol está sujeto a la pared con dos argollas en los puntos *P* y *M*. Cada punto del plano de la red está a una distancia igual de las dos líneas de base $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. ¿Por qué es $\overleftrightarrow{PM}$ perpendicular a $\overline{AB}$?



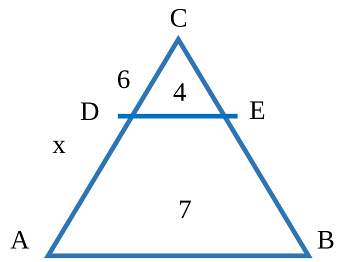
VIII.

Hallar el valor de b y c



b 4

IX. Aplica el Teorema de Thales, Para calcular el valor de x.

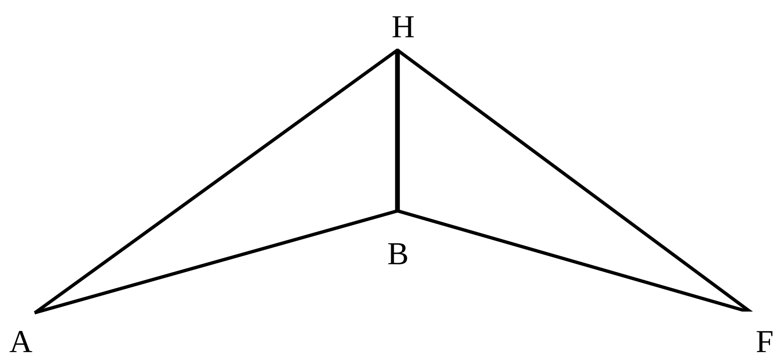


EXAMEN DE AUTOEVALUACÓN.
UNIDAD 4. CONGRUENCIA, SEMEJANZA Y TEOREMA DE PITÁGORAS

1. Demostrar que $\Delta AHB \cong \Delta FHB$

Dado que:

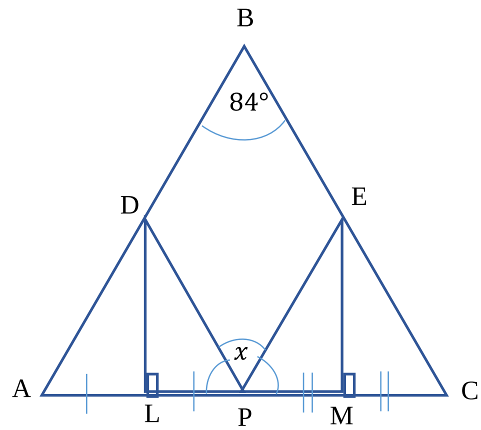
$$\overline{AH} \cong \overline{FH}$$
$$\measuredangle AHB \cong \measuredangle FHB$$



2. ¿Cúal es el valor de $\measuredangle x$?

Dado que:

$$\overline{AL} \cong \overline{LP}$$
$$\overline{PM} \cong \overline{MC}$$

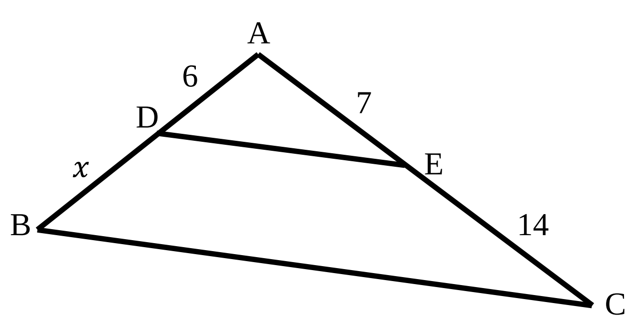


3. Probar que $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$

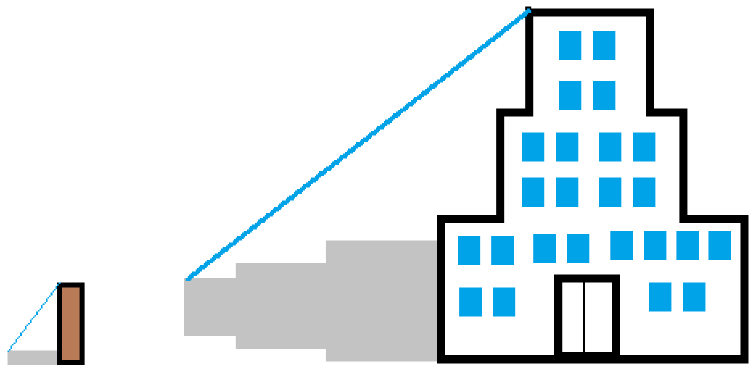
Dado que:

$$\overline{AB} \cong \overline{XY}$$
$$\measuredangle A \cong \measuredangle X$$
$$\measuredangle B \cong \measuredangle Y$$

4. Si $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, determinar el valor de x

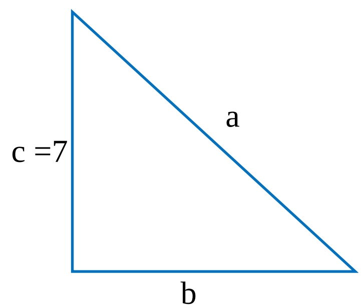


5. Calcula la altura de un edificio que proyecta una sombra de 49 m en el momento en que una estaca de 2 m arroja una sombra de 1,25 m.

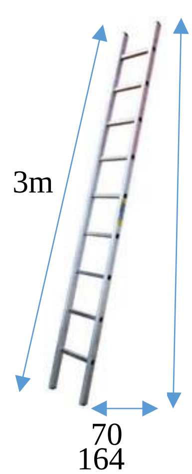


6. Dos polígonos son semejantes con razón de semejanza 5. Si el perímetro del menor es 12 cm, halla el perímetro del mayor.

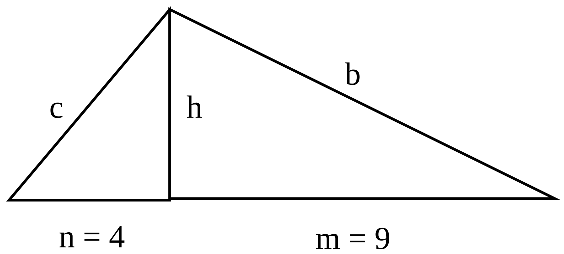
7. Halla la longitud del lado que falta.



8. Calcular la altura que podemos alcanzar con una escalera de 3 metros apoyada sobre la pared si la parte inferior la situamos a 70 centímetros de ésta.



9. En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 4 y 9 metros. Calcular la altura relativa a la hipotenusa.



BIBLIOGRAFÍA

Barnett, Raymond, Algebra, México, Mc Graw-Hill, 2000.

Briton, Jack y Bello, Ignacio, Matemáticas contemporáneas, México Harla, 1986.

Fernández, Josefa y Rodríguez, Ma. Inés, Juegos y pasatiempos para la enseñanza de la matemática elemental, Madrid, Síntesis, 1991.

Gobran, Alfonse, Álgebra elemental, México, Grupo Editorial Iberoámericana, 1990.

Larson. Ronald y Hostetler, Robert, Álgebra, México, Publicaciones Cultural, 1996.

Meserve, Bruce y Sobel Max, Introducción a las matemáticas, México, Reverté, 1971.

Miller, Charles y Heeren Vern, Introducción al pensamiento matemático, México Trillas, 1979.

Miller, Charles, et al., Matemáticas: razonamiento y aplicaciones, México Addison Wesley Longman, 1999.

Smith, Stanley et al., Álgebra, México, Pearson, Educación, 2001.

Smith, Stanley et al., Álgebra, trigonometría y geometría analítica, México, Addison Wesley Longman, 1998.

Walter, Fleming y Dale, Varberg, Álgebra trigonometría y geometría analítica, México, Prentice-Hall Hispanoamérica, 1991.

Wentworth, Jorge y Smith, David, Geometría plana y del espacio, México, Editorial Porrúa, 1986.

Wiscamb, Margaret, Geometría, México, Trillas,1976.

Euclides, Elementos de Geometría, (versión de Juan García Bacca), México UNAM, 1992